Aalto-yliopisto

Mat-2.4177 Operaatiotutkimuksen projektityöseminaari

Kevät 2012

Luottoluokitusten siirtymätodennäköisyyksien estimointi ja kalibrointi

Loppuraportti

9.5.2012

Janne Kunnas (projektipäällikkö)

Tuomas Nikoskinen

Joonas Parjanne

Raul Kleinberg

Mikko Kotilainen

Sisällysluettelo

1. Johdanto

Tämä raportti koostuu Aalto-yliopiston kurssilla "Operaatiotutkimuksen projektityöseminaari" toteutetun projektityön loppuraportista. Raportissa esiteltävä projektityö tehtiin OP-Pohjola-konsernin riskienhallintaosaston tarjoamasta aiheesta "Luottoluokitusten siirtymätodennäköisyyksien estimointi ja kalibrointi".

Luottoluokitus välittää tietoa riskistä, joka liittyy velkasopimukseen – kuinka todennäköistä on, että velanottaja ei pysty takaisinmaksuun. Luottoluokitus kuvaa siis todennäköisyyttä, jolla velanottaja ajautuu maksukyvyttömyyteen. Vastaavasti luottoluokitusten siirtymätodennäköisyydet kuvaavat todennäköisyyksiä muutoksille luottoluokitusten välillä. Tyypillisesti sekä luokitusten että siirtymätodennäköisyyksien tarkastelu tehdään vuositasolla.

Luottoluokitukset muodostavat pohjan luottoriskien analysoinnille. Luottoluokituksia julkaisevat isot kansainväliset luottoluokittajat Standard & Poor's , Moody's ja Fitch . Lisäksi pankeilla, kuten OP-Pohjolalla, on yleensä käytössään oma sisäinen luottoluokitusjärjestelmä. OP-Pohjolalla siirtymätodennäköisyyksiä hyödynnetään luottoriskin mittauksessa, luotto- ja takaustuotteiden hinnoittelussa sekä riskiraportoinnissa. Viime aikoina luottoluokitukset ovat saaneet myös paljon huomiota mediassa, kun mm. Standard & Poor's laski USA:n luottoluokitusta vuonna 2011 parhaalta tasolta AAA toiseksi parhaalle tasolle AA+.

Luottoluokituksten siirtymätodennköisyydet esitetään transitiomatriisissa. Transitiomatriisin rivit vastaavat alkuhetken luottoluokitusta ja rivin sarakkeet sisältävät todennäköisyydet siirtyä toiseen luottoluokitukseen tai pysyä samassa luokituksessa. Erityisen kiinnostavia todennäköisyyksiä matriisissa ovat todennäköisyydet siirtymille huonoimpiin luokkiin eli maksukyvyttömiin luokkiin, koska lainanmyöntäjälle tieto lainanottajan maksukyvyttömyyden todennäköisyydestä on luonnollisesti erittäin tärkeä.

Siirtymätodennäköisyyksien eli ns. transitiotodennäköisyyksien määrittelemisessä on edelleen vallitsevana standardina yksinkertainen cohort-menetelmä (Lando ja Skødeberg 2002), jossa todennäköisyydet lasketaan frekventisesti historiassa tapahtuneiden siirtymien määrästä. Tämä menetelmä on hyvin suoraviivainen eikä huomioi esimerkiksi ajasta riippuvia ilmiöitä. Huomionarvoista on, että cohort-menetelmä määrittää siirtymien, joista ei ole havaintoja, todennäköisyyden nollaksi.

Luottoluokituksia ja niiden siirtymätodennäköisyyksiä on tutkittu viime vuosikymmenten aikana paljon ja useita vaihtoehtoisia menetelmiä transitiomatriisin estimointiin on esitetty. Tässä raportissa estimoidaan transitiomatriisi kahdella eri tavalla, joita ovat suhdannemalli ja sekoitemalli. Lisäksi kirjallisuuskatsauksessa käsitellään kolme muuta mallia transitiomatriisin estimointiin.

Työn lähtökohtana on OP-Pohjolan tarjoama data asiakasyritysten luottoluokituksista ja niiden muutoksista neljän vuoden ajalta. Tässä loppuraportissa käsitellään ensin projektin päämäärä, minkä jälkeen siirrytään kirjallisuuskatsaukseen. Seuraavaksi tutustutaan käytettävissä olevaan dataan. Tämän jälkeen esitellään varsinaiset käytettävät menetelmät ja niiden validointi. Lopuksi käsitellään mallien antamat tulokset ja käydään läpi lopulliset johtopäätökset.

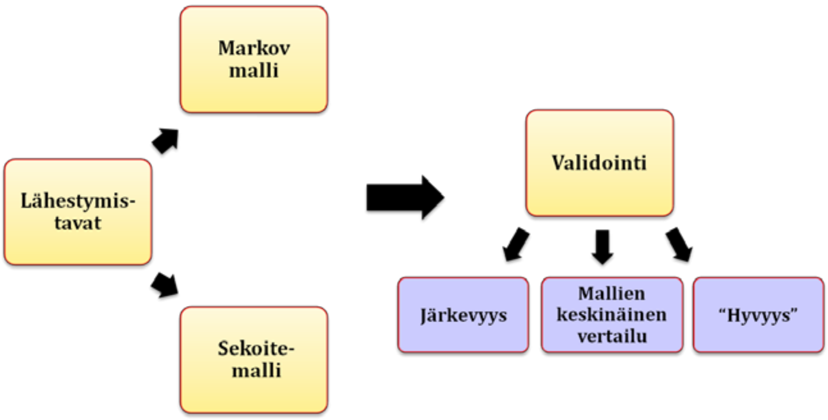
2. Projektin päämäärä

Tämän projektityön päämäärä on estimoida Pohjola pankin keräämästä luottoluokitusaineistosta transitiomatriisi luottoluokitusten muutoksille. Tämä matriisi sisältää todennäköisyydet kaikille mahdollisille luokituksen siirtymille, jotka käytettävän luokitusjärjestelmän puitteissa ovat mahdollisia. Transitiomatriisin estimointi toteutetaan kahdella eri tavalla, joiden lähestymistavat estimointiongelmaan ovat hyvin erityyppiset. Tämän lisäksi työn kirjallisuuskatsauksessa esitetään lyhyt yhteenveto kolmesta muusta mallista, joita on esitetty transitiomatriisin estimointiin.

Työssä tarkastellaan myös kuinka sovellettavien mallien estimaattia transitiomatriisille tulee kalibroida, jotta todennäköisyyksiä luottoluokitusten siirtymille voidaan pitää uskottavina ja realistisina. Kuitenkaan kalibrointimenetelmä ei voi olla sellainen, jolla estimaatti ylisovitetaan aineistoon, jolloin mallin avulla saatava yleistettävyys menetetään täysin.

Kalibroinnin ohella ensi sijaisen tärkeää on validoida ja analysoida estimaatti transitiomatriisille. Matriisin on oltava järkevä ja sen on täytettävä muutamia tyypillisiä piirteitä, joita luottoluokitusmatriiseilla järjestään löytyy. Koska työssä käytetään kahta eri menetelmää transitiomatriisin estimointiin, on mahdollista tarkastella ja vertailla eri menetelmillä tuotettujen estimaattien eroja. Estimaattien validointi ja vertailu ovat työssä käytettävien menetelmien järkevyyden kannalta erittäin olennainen tarkistus.

Kuvassa 1 on esitetty kaaviokuva projektin päämäärän muotoutuminen vaadittavista osatehtävistä. Valittujen lähestymistapojen puitteissa estimoidaan transitiomatriisi, joka kalibroidaan ja validoidaan. Validoinnissa keskitytään siihen, ovatko estimaatit järkeviä ja kuinka eri malleilla tuotetut estimaatit poikkeavat toisistaan. Lisäksi estimaattien hyvyyteen otetaan kvalitatiivisella tasolla kantaa.



Kuva 1. Transitiomatriisi luottoluokitusten siirtymätodennäköisyyksille estimoidaan kahden eri lähestymistavan pohjalta. Saadut estimaatit kalibroidaan, jonka jälkeen niitä validoidaan ja vertaillaan keskenään.

3. Kirjallisuuskatsaus

3.1. Markov-mallit

Markovin ketju on diskreettiaikainen satunnaisprosessi, jossa on Markov-ominaisuus. Markov-ominaisuudella tarkoitetaan unohtamista, eli seuraava tila ei riipu lainkaan historiasta vaan pelkästään nykytilasta.

3.1.1. Markov-ketju

Olkoon $X = \{X_1, X_2, \dots\}$ diskreettiaikainen satunnaisprosessi. Tämä on Markov-ketju, jos sillä on Markov-ominaisuus. Olkoon aika t ja satunnaisprosessi X

$$\{X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_1 = x_1\} \tag{1}$$

joka sisältää koko prosessin historian.

Ehdollinen todennäköisyys seuraavalle tilalle t+1 koko historia huomioon ottaen voidaan kirjoittaa

$$P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_1 = x_1) \tag{2}$$

Kun taas

$$P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t) \tag{3}$$

on seuraavan tilan ehdollinen todennäköisyys, kun se riippuu vain nykyisestä tilasta. Markov-ominaisuus täyttyy jos nämä kaksi ovat samoja. Eli Markov-ominaisuus tarkoittaa, että satunnaisprosessin tila riippuu vain nykyisestä tilasta

$$\begin{aligned} P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_1 = x_1) \\ = P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t) \end{aligned} \tag{4}$$

Satunnaisprosesseja, joilla on Markov-ominaisuus, kutsutaan siis Markov-ketjuiksi. Markov-ominaisuuden mukaan prosessin tulevat arvot eivät siis riipu historiasta, vaan vain nykyisestä arvosta. Markov-ominaisuutta kutsutaankin usein unohtamisominaisuudeksi. Nyt transitiotodennäköisyydet p_{ij}, jossa i on lähtötila ja j tuleva tila, voidaan kätevästi kirjoittaa matriisiin

$$A = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0S} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1S} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{S0} & p_{S1} & \cdots & p_{SS} \end{pmatrix}$$

jossa A on siis transitiotodennäköisyysmatriisi. Nyt rivi i $[p_{i0} \; p_{i1} \; \dots \; p_{iS}]$ esittää kaikki siirtymätodennäköisyydet tilasta i ja täten sen summa täytyy olla 1. Nyt transitiotodennäköisyyksille ei ole luonnollisia a priori arvoja vaan ne pitää estimoida datasta.

3.1.2. Estimointi

Miten tämä datasta estimointi pitäisi tehdä? Löytyy itsestään selvä ehdotus jossa p_{ij} pitäisi estimoida suurimman uskottavuuden estimoinnin mukaisesti datasta saatujen siirtymien i:stä j:hin frekvenssinä. Nyt datasta pitää laskea seuraavat luvut:

- N_{ij} = transitioiden lukumäärä tilasta i tilaan j
- $N_{i.}$ = tilasta i alkavien transitioiden lukumäärä
- N_{ij} = tilaan j päätyvien transitioiden lukumäärä
- N = transitioiden kokonaismäärä

jolloin transitiotodennäköisyys p_{ij} voidaan estimoida kaavalla

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_{i\cdot}} \quad (5)$$

3.1.3. Markovilainen sekoitemalli

Markovilaisen mallin ongelmana on, ettei se huomioi transitioiden "ajautumista" (eng drift). Ajautumisella tarkoitetaan yrityksen luottoluokitusten siirtymien riippuvuutta edellisistä siirtymistä. Markovilainen malli olettaa, että siirtymät riippuvat vain nykyisestä tilasta, eivätkä siirtymähistoriasta. Lisäksi transitioiden on todettu riippuvan talouden tilasta sekä yrityksen toimialasta. (Altman, Kao 1992), (Altman 1998), (Nickell et al. 2000), (Bangia et al. 2000), (Lando, Skødeberg 2002)
Frydman ja Schuermann esittelivät Markovilaisen sekoitemallin (Frydman, Schuermann 2008), joka on sekoite kahdesta toisistaan riippumattomasta jatkuvasta aikahomogeenisesta Markov-ketjusta. Ketjut eroavat toisistaan vain siirtymien nopeuksien suhteen. Niillä on sama transitiotodennäköisyysmatriisi. Sekoitemalli jakaa yritykset kahteen ryhmään, joista toisen ryhmän yritysten luottoluokitus muuttuu nopeammin kuin toisen ryhmän yritysten.
Sekoitemalli on Markov-ketjuja hyödyntävä jatkuva-aikainen stokastinen prosessi X= [X(t), t>0] jolla on luottoluokkia edustavat tilat R={1,2,…,w}. Malli eroaa tavallisesta Markov-mallista siten että prosessi on kombinaatio kahdesta Markov-ketjusta $X_Q$ja X_G jotka ovat generaattorien G ja Q tuottamia siten että

$$G = \Gamma Q \quad (6)$$

jossa $\Gamma = diag(y_1, y_2, \dots, y_w)$. Markov-ketjujen $X_Q$ja X_G vaikutusten suuruus riippuu prosessin alkutilasta i siten että

$$\begin{aligned} s_i &= P(X_G|X(0) = i) \\ 1 - s_i &= P\big(X_Q\big|X(0) = i\big), \qquad 0 \le s_i \le 1 \end{aligned} \quad (7)$$

eli prosessi kehittyy s_i:n osuudella X_G:n tavalla $1 - s_i$:n osuudella X_Q:n tavoin. Generaattori Q on matriisi, jonka alkiot q_{ij} toteuttavat

$$q_{ii} \leq 0, q_{ij} \geq 0, \sum_{i \neq j} q_{ij} = -q_{ii} \tag{8}$$

eli diagonaalilla on negatiivista saman verran kuin rivillä on positiivista yhteensä. Diagonaalialkioiden käänteisluvut $\frac{1}{-q_{ii}}$ edustavat odotusarvoa ajalle samassa tilassa pysymiseen ja $\frac{q_{ij}}{-q_{ii}}$ todennäköisyyttä siirtyä tilaan j kun siirtymä tapahtuu. Nyt matriisin alkiot estimoidaan samalla tavalla kuin tavallisessakin Markov-prosessissa suurimman uskottavuuden menetelmällä:

$$\hat{q}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i} \tag{9}$$

jossa N_{ij} on kaikki siirtymät i->j koko historian ajalta ja $N_i = \sum_{i \neq j} N_{ij}$. Markov-ketjujen $X_Q$ja $X_G$tuottamat transitiomatriisit $P_Q$ja $P_G$saadaan kaavoilla

$$\begin{aligned} P_Q(t) &= \exp(tQ) \\ P_G(t) &= \exp(tG) \end{aligned} \tag{10}$$

ja kokonaistransitiotodennäköisyyttä kuvaava matriisi P saadaan

$$P(0,t) = SP_G(t) + (1 - S)P_Q(t), \quad t \geq 0 \tag{11}$$

jossa $S = diag(s_1, s_2, \dots, s_w)$.

3.2. Bayesiläinen lähestymistapa luottoluokitusten estimointiin

Tarkastellaan bayesiläistä suhdannevaihelut huomioivaa lähestymistapaa (Stefanescu, 2009) luottoluokitusten estimointiin. Liitetään jokaiseen asiakkaaseen j hetkellä t reaalilukuarvoinen luottopistemäärä $D_{j,t}$ ja jaetaan reaalilukujen joukko osaväleihin $A_\zeta(t) \subset \mathbb{R}$ siten, että asiakaalla j on luottoluokitus ζ täsmälleen kun $D_{j,t} \in A_\zeta(t)$. Tarkastellaan luottopistemäärän kehitystä stokastisena prosessina

$$D_{j,t+1} = \mu_{j,t} + D_{j,t} + \beta_j w_{t+1} + e_{j,t+1}, \tag{12}$$

jossa asiakkaan j hetken t+1 luottopistemäärään $D_{j,t+1}$ vaikuttavat hetken t+1 normaalijakautuneet yleistaloudelliset satunnaiset shokit w_{t+1} painotettuna asiakaskohtaisin kertoimin β_j ja asiakaskohtaiset satunnaiset shokit $e_{j,t+1}$ sekä edeltävän hetken t luottopistemäärä $D_{j,t}$ ja makrotaloudelliset tekijät $\mu_{j,t} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{j,i} X_{i,t}$, jossa muuttujat $X_{i,t}$ ovat makrotaloudellisia tilastolukuja kuten bruttokansantuotteen muutos ja kuluttajahintaindeksi painotettuna asiakaskohtaisin kertoimin $\alpha_{j,i}$.

Kun ei tiedetä asiakkaiden luottopistemääriä $D_{j,t}$ vaan ainoastaan heidän luottoluokituksensa ζ, korvataan $D_{j,t}$ kyseistä luottoluokitusta ζ edustavalla luottopistemäärällä $R_{\zeta,t}$, jolloin

$$D_{j,t+1} = \mu_{\zeta,t} + R_{\zeta,t} + \beta_\zeta w_{t+1} + e_{j,t+1}. \tag{13}$$

Asiakas j siirtyy hetkellä t+1 luottoluokituksesta ζ maksuhäiriöluokitukseen 0, jos $D_{j,t+1} < \gamma_{\zeta,0}$. Todennäköisyys tälle tietyillä $R_{\zeta,t}$ ja w_{t+1} on

$$\begin{aligned} &P\left(D_{j,t+1} < \gamma_{\zeta,0} \middle| R_{\zeta,t}, w_{t+1}\right) \\ &= P\left(e_{j,t+1} < \gamma_{\zeta,0} - \mu_{\zeta,t} - R_{\zeta,t} - \beta_\zeta w_{t+1} \middle| R_{\zeta,t}, w_{t+1}\right) \\ &= g\left(\gamma_{\zeta,0} - \mu_{\zeta,t} - R_{\zeta,t} - \beta_\zeta w_{t+1}\right), \end{aligned} \tag{14}$$

missä g( ) on logit-linkkifunktio.

Kun muuttujien $R_{\zeta,t}$ ja w_{t+1} arvoja ei tunneta, saadaan todennäköisyys ottamalla odotusarvo näiden suhteen

$$\mathrm{p_t}(\zeta, 0) = \mathrm{E_t}\left(g\left(\gamma_{\zeta,0} - \mu_{\zeta,t} - R_{\zeta,t} - \beta_\zeta w_{t+1}\right)\right). \tag{15}$$

Asiakas siirtyy luokituksesta ζluokitukseen ψ, jos sen luottopistemäärälle pätee $\gamma_{\zeta,\psi-1} \le D_{j,t+1} \le \gamma_{\zeta,\psi}$. Tätä vastaava transitiotodennäköisyys tietyillä $R_{\zeta,t}$ ja w_{t+1} on

$$\begin{aligned} &P\left(\gamma_{\zeta,\psi-1} \le D_{j,t+1} \le \gamma_{\zeta,\psi} \middle| R_{\zeta,t}, w_{t+1}\right) \\ &= P\left(\gamma_{\zeta,\psi-1} \le \mu_{\zeta,t} + R_{\zeta,t} + \beta_\zeta w_{t+1} + e_{j,t+1} < \gamma_{\zeta,\psi} \middle| R_{\zeta,t}, w_{t+1}\right) \\ &= g\left(\gamma_{\zeta,\psi} - \mu_{\zeta,t} - R_{\zeta,t} - \beta_\zeta w_{t+1}\right) - g(\gamma_{\zeta,\psi-1} - \mu_{\zeta,t} - R_{\zeta,t} \\ &\qquad - \beta_\zeta w_{t+1}). \end{aligned} \tag{16}$$

Kun muuttujien $R_{\zeta,t}$ ja w_{t+1} arvoja ei tunneta, saadaan todennäköisyys ottamalla odotusarvo näiden suhteen

$$\begin{aligned} \mathrm{p_t}(\zeta, \psi) = \mathrm{E_t}&\Big(g\big(\gamma_{\zeta,\psi} - \mu_{\zeta,t} - R_{\zeta,t} \\ &- \beta_\zeta w_{t+1}\big)\Big) - E_t\Big(g\big(\gamma_{\zeta,\psi-1} - \mu_{\zeta,t} - R_{\zeta,t} \\ &- \beta_\zeta w_{t+1}\big)\Big). \end{aligned} \tag{17}$$

Seuraavaksi on estimoitava sellaiset parametrit $\alpha_{\zeta,i}$ ja β_ζ, joilla malli antaisi toteutunutta transitiodataa mahdollisimman hyvin vastaavat transitiotodennäköisyydet. Parametrien estimointiin voidaan käyttää bayesiläistä lähestymistapaa. Bayesin säännön perusteella parametrien θ todennäköisyys ehdolla data y on verrannollinen uskottavuusfunktion $p(y|\theta)$ ja parametrien prioritodennäköisyyden $p(\theta)$ tuloon

$$p(\theta|y) \propto p(y|\theta)p(\theta). \tag{18}$$

Bayesiläinen päättely vaatii siis priorin $p(\theta)$ määrittelemistä. Kun oletetaan, että eri parametrien $\alpha_{\zeta,i}$, β_ζ ja satunnaismuuttujien w_t parametrien priorit ovat toisistaan riippumattomia, voidaan $p(\theta)$ kirjoittaa eri parametrien priorien tulona. Parametrien priorijakaumina käytetään tyypillisesti normaalijakaumia suurilla variansseilla. Eksakti bayesiläinen päättely ei kuitenkaan ole käytännössä mahdollista näin monimutkaiselle ongelmalle, vaan on käytettävä approksimatiivisia menetelmiä kuten Gibbsin poimintaa (Barber,2012). Gibbsin poiminnassa poimitaan näytteitä vuorotellen kunkin parametrin täydellisestä ehdollisesta jakaumasta ehdolla kaikki muut parametrit

$$p(\theta_j | \theta_{-j}^{t-1}, y), \tag{19}$$

missä

$$\theta_{-j}^{t-1} = (\theta_1^t, \ldots, \theta_{j-1}^t, \theta_{j+1}^{t-1}, \ldots, \theta_d^{t-1}) \tag{20}$$

sisältää kaikki muut parametrit viimeisimmillä arvoillaan. Bayesiläisten estimointitehtävien laskentaan on tarjolla useita ohjelmistoja, kuten BUGS (Bayesian Inference Using Gibbs Sampling). Ohjelmistoon syötetään käytettävä malli skriptinä tai graafisena mallina. Mallille määritellään käytettävät muuttujat, näiden väliset ehdolliset riippuvuussuhteet, priorijakaumat ja todennäköisyydet linkkifunktioiden avulla. Tämän jälkeen mallin parametrien estimointi voidaan suorittaa annetulle datalle Gibbsin poimintaa käyttäen.

Kun mallin parametrit on estimoitu, saadaan mallia ja makrotaloudellista tilastodataa käyttämällä estimoitua tulevan ajanhetken transitiotodennäköisyydet. Mallista on myös helppo muokata erilaisia versioita joiden tuloksia voi verrata keskenään. Lähtökohtana on stokastinen prosessi

$$D_{j,t+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\zeta i} X_{ti} + R_{\zeta t} + \beta_\zeta w_{t+1} + e_{j,t+1}, \tag{21}$$

jossa tulevan ajanhetken luottopistemäärä $D_{j,t+1}$ riippuu nykyhetken makrotaloudellisista selittävistä muuttujista X_{ti}, nykyistä luottoluokitusta vastaavasta luottopistemäärästä $R_{\zeta t}$ ja riippumattomista satunnaisista shokeista w_{t+1}. Lisäksi voidaan tarkastella esimerkiksi malleja, joissa ei huomioida satunnaisshokkeja tai makrotaloudellisia muuttujia. Toisaalta voidaan tarkastella myös malleja, joissa peräkkäisten ajanhetkien shokit eivät olekaan riippumattomia, vaan korreloivat keskenään.

Yllä kuvattu bayesiläinen estimointi on monipuolinen menetelmä, sillä siinä voidaan huomioida sekä suhdannevaihtelun että satunnaisten shokkien vaikutus ja lisäksi se huomioi ei-markovilaisena mallina myös niin sanotun drift-ilmiön eli pidemmän aikavälin historian vaikutuksen luottopistemäärän kehitykseen. Lisäksi mallista on helppo muokata erilaisia versioita joiden tuloksia voi verrata keskenään.

Malli on kuitenkin myös varsin monimutkainen ja siinä on paljon parametrejä. Tämän vuoksi malli ei välttämättä ole sopiva etenkään jos dataa on vähän. Monimutkaisuutensa vuoksi emme valinneet tätä mallia toteutettavaksi tämän projektin puitteissa, mutta se saattaisi kuitenkin olla kiinnostava lähestymistapa suhdannevaihtelut ja drift-ilmiön huomioivaan luottoluokitusten estimointiin tulevaisuudessa.

4. Datan analysointi

4.1. Transitiodatan kerääminen ja frekvenssiperustaisen transitiomatriisin muodostaminen

Projektityössä käytettävä data on Pohjola pankin keräämä otos luottoluokitusaineistosta vuosilta 2008-2011. Luottoluokitukset koskevat Pohjola pankin keskisuuria ja suuria yritysvastapuolia. Luottoluokitukset vastaavat kunkin yrityksen luottoluokitusta vuoden lopulla ja aineisto kattaa noin 8000 yritysvuotta. Finanssikriisiä seurannut vuoden 2009 taantuma osuu luottoluokitusaineiston keräämisen ajanjaksolle.

Taulukko 1. Luottoluokitushavainnot vuosittain

Vuosi	Lkm	Kum.lkm	Osuus
2008	1648	1648	21 %
2009	1971	3619	25 %
2010	2206	5825	28 %
2011	2085	7910	26 %

Tarkastellaan datan laajuutta tarkastelemalla käytössä olevien luokitusten määrää vuosittain. Taulukossa 1 on esitetty varsinaisten luottoluokitushavaintojen määrä vuosittain. Luottoluokitushavaintoja on kerätty vuosittain keskimäärin noin kaksi tuhatta. Vuodelta 2008 havaintoja on hieman vähemmän ja vuodelta 2010 enemmän. Keräämällä tästä aineistosta luottoluokitusten siirtymät pääsemme tarkastelemaan varsinaisia luottoluokitusten muutoksia. Ensin katsotaan yrityksen luokitus tiettynä vuonna ja sen jälkeen luottoluokitus seuraavana vuonna, eli luokitusten muutokset saadaan kerättyä luottoluokituksista ja niiden muutoksista vuosien 2008 ja 2009, 2009 ja 2010 sekä 2010 ja 2011 välillä. Luottoluokitustietoa ei ole saatavilla kaikista yrityksistä kaikilta vuosilta. Yrityksen luottoluokitus saatetaan tietää vain esimerkiksi vuodelta 2008 ja 2009, jolloin kyseistä yrityksestä saadaan kerättyä vain yksi luottoluokituksen muutos. On myös mahdollista, että yrityksen luottoluokitus tiedetään esimerkiksi vuosilta 2008 ja 2010 mutta ei vuodelta 2009. Tällöin kyseisestä yrityksestä ei saada lainkaan transitiodataa, koska luottoluokitusten muutokset huomioidaan vain peräkkäisille vuosille. Käsittelemällä luottoluokitusaineisto edellä kuvatulla tavalla saadaan kerättyä varsinainen transitiodata, jonka määrä on esitetty taulukossa 2.

Taulukko 2. Luottoluokitusten muutokset vuosittain

Aikaväli	Transitioita	Huonompi	Ennallaan	Parempi	Default
2008-2009	1380	611 (44.3 %)	622 (45.1 %)	147 (10.7 %)	39 (2.8%)
2009-2010	1543	277 (18.0 %)	967 (62.7 %)	299 (19.4 %)	24 (1.6 %)
2010-2011	1793	327 (18.2 %)	1118 (62.4 %)	348 (19.4 %)	25 (1.4 %)

Taulukkoon on eritelty luottoluokitusten muutosten määrä kullekin vuoden aikavälille. Yhteensä luottoluokitusten muutoksia saatiin kerättyä 4716 kappaletta. Taulukkoon on merkitty miten muutosten määrät ja osuudet jakautuvat luokituksen hunonemiselle, ennallaan pysymiselle ja paranemiselle. Lisäksi maksukyvyttömyyteen eli default-luokkaan johtavien muutosten määrä on kerätty. Taulukosta nähdään, että aikavälillä 2008-2009 luottoluokitusten määrästä huomattavan suuri osa on ollut luokituksen huononemisia. Kyseisellä aikavälillä luokitusten muutoksista 44.3 prosenttia on ollut huononemisia. Myös maksukyvyttömyyteen johtavia luokituksen muutoksia on ollut isompi aikavälillä 2008- 2009. Finanssikriisi selittää näitä havaintoja. Aikavälit 2009-2010 ja 2010-2011 ovat olleet vastaavasti parempia, kun luottoluokitusten huononemisia on ollut vain alle 20 prosenttia ja maksukyvyttömyyteen johtavia muutoksia 1.6 ja 1.4 prosenttia.

Nyt kun varsinainen transitiodata on kerätty, voidaan transitiomatriisi laskea perinteisellä cohort-menetelmällä. Frekvenssiperustaisella cohort-menetelmällä luottoluokitusten siirtymätodennäköisyydet lasketaan käymällä jokainen luokka erikseen läpi. Jos luokituksessa i on alkuhetkellä N_i yritystä ja tästä yritysten määrästä on siirtynyt N_{ij} luokitukseen j seuraavalla ajanhetkellä, saadaan transitiotodennäköisyydet laskettua kaavasta 5. Laskettu transitiomatriisi on esitetty liitteessä 5.

4.2. Tilastolliset tunnusluvut

Tutustutaan transitiodataan laskemalla keskiarvot ja keskihajonnat luottoluokille. Kvantifioidaan Pohjolan pankin varsinaiset luottoluokitukset järjesteysnumerolla 1:stä 19:ta siten, että 1 on paras luottoluokitus ja 19 maksukyvyttömyysluokka. Taulukossa 3 on esitetty jokaiselle luokalle keskiarvo tulevan luokan arvolle sekä keskihajonta.

Taulukko 3. Keskiarvot ja keskihajonnat luokille

Luokka	Keskiarvo	Keskihajonta
1	2.95	5.66
2	2.65	1.77
3	3.17	0.44
4	4.23	0.83
5	5.01	0.57
6	6.27	1.03
7	7.02	0.83
8	8.17	0.91
9	9.30	1.06

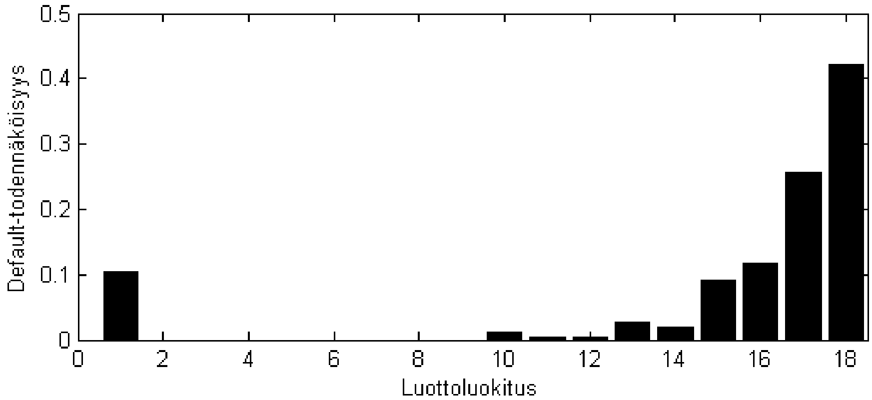
Luokka	Keskiarvo	Keskihajonta
10	10.40	1.56
11	11.07	1.35
12	12.28	1.23
13	13.26	1.44
14	14.07	1.38
15	15.31	1.50
16	16.34	1.33
17	17.07	1.84
18	17.95	1,13

Keskiarvot vastaavat hyvin alkuhetken luokituksen järjestyslukua. Luokalle 1 keskiarvo on huomattavan suuri, mikä johtuu muutamasta default-siirtymästä. Luokkaa 2 ja 18 lukuun ottamatta keskiarvot ovat aina suurempia kuin luokituksen arvo alkuhetkellä. Odotusarvoisesti tuleva luokka on siis hieman huonompi kuin alkuhetkellä. Edellisessä kappaleessa taulukosta 2 havaittiin aikavälillä 2008-2009 merkittävä osuus luottoluokitusten huononemisia, mikä selittää myös keskiarvon käyttäytymistä.

Keskihajonnat liikkuvat kullekin luokalle luokkaa 1 lukuun ottamatta välillä 0,44-1,84. Huonommissa luokissa voidaan havaita trendiä suurempaan keskihajontaan. Luokan 1 suuri keskihajonta johtuu muutamasta default-havainnosta.

4.3. Kvalitatiivinen tarkastelu

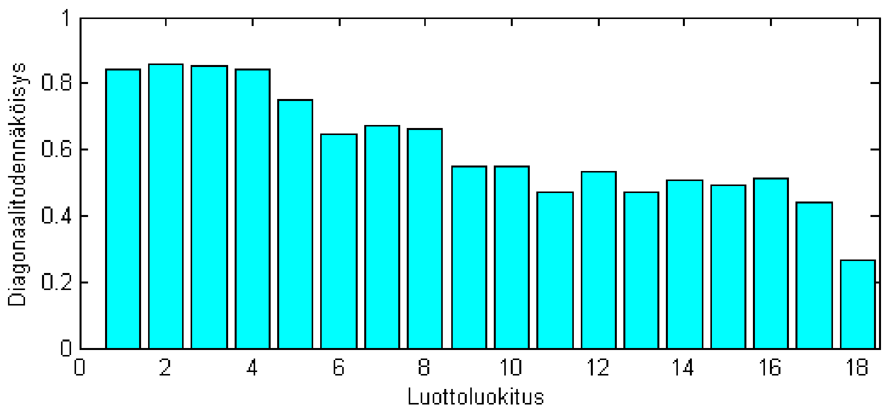
Tarkastellaan lopuksi muutamia mielenkiintoisia havaintoja op:n datasta kappaleessa 6.1 esitellyllä cohort-menetelmällä laskettuja transitiotodennäköisyyksiä. Tarkastellaan ensin kunkin luokan todennäköisyyttä siirtyä maksukyvyttömään luokkaan eli default-luokkaan. Kuvassa 2 nähdään default-todennäköisyydet.



Kuva 2. Default-todennäköisyydet

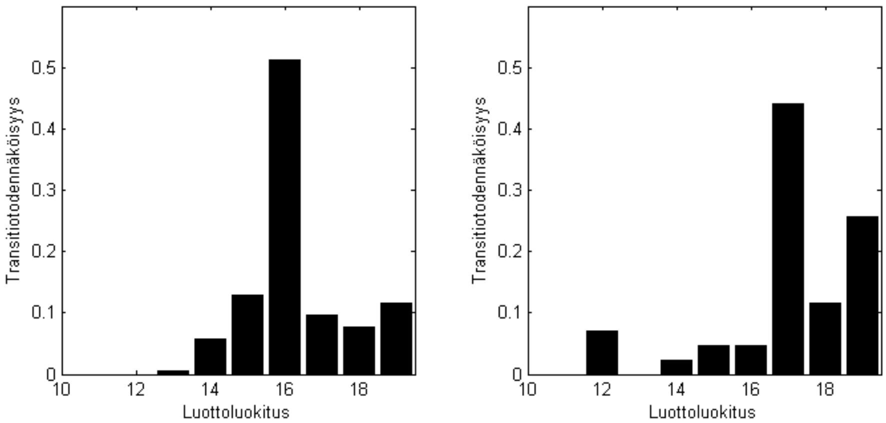
Parhaalle luokalle havaitaan poikkeuksellisen suuri todennäköisyys siirtyä maksukyvyttömään luokkaan. Todennäköisyyttä voidaan pitää satunnaisena eikä se ole erityisen johdonmukainen. Muuten default-todennäköisyydet käyttäytyvät loogisesti. Luokasta 10 eteenpäin default-todennäköisyys kasvaa pääpirteissään eskponentiaalisesti ja huonoimmissa luokissa default-todennäköisyydet ovat jo hyvin suuria.

Tutkitaan seuraavaksi kunkin luokan todennäköisyyttä pysyä samassa luokassa eli transitiomatriisin diagonaalielementtejä. Kuvassa 3 nähdään kunkin luottoluokituksen todennäköisyys pysyä samassa luokituksessa. Luokille 1-4 todennäköisyys pysyy noin 0,8:ssa ja luokasta 5 eteenpäin todennäköisyys rupeaa pienenemään. Todennäköisyyden pienenemisen trendiä voidaan pitää melko lineaarisena. Toisiksi huonoimmassa luokassa 18 todennäköisyys kuitenkin pienenee jyrkästi ja edellisestä kuvasta 2 havaitaan, että todennäköisyys siirtyä luokasta 18 maksukyvyttömään luokkaan on suurempi kuin pysyä samassa luokituksessa.



Kuva 3. Todennäköisyydet pysyä samassa luokassa

Katsotaan vielä mielenkiintoista ilmiötä, joka havaittiin luokille 15-17. Ilmiö havaitaan kuvasta 4, johon on kerätty transitiotodennäköisyydet luokille 16 ja 17. Luottoluokituksen huonotessa on todennäköisempää siirtyä suoraan maksukyvyttömään luokkaan kuin sitä edeltäviin luokkiin. Kuvan 4 perusteella luokasta 16 on todennäköisempää siirtyä default-luokkaan kuin luokkiin 17 tai 18. Luokasta 17 on vastaavasti todennäköisempää siirtyä suoraan default-luokkaan kuin luokkaan 18. Finanssikriisin voidaan nähdä osaltaan selittävän kyseistä ilmiötä.



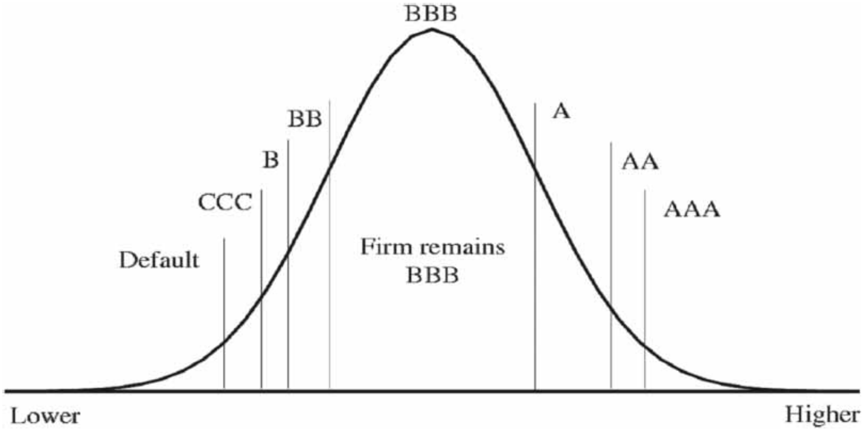
Kuva 4. Default-todennäköisyyden korostuminen suhteessa muihin siirtymiin

5. Menetelmät

Tässä kappaleessa esitellään työssä sovellettavat mallit yksityiskohtaisemmin kuin kirjallisuuskatsauksessa esitetyt markovilaiset ja bayesilaiset menetelmät. Kappaleessa 5.1 Suhdannemalli käytetty muuttuja w on eri kuin aikaisemmin kappaleessa 3.2 Bayesiläinen lähestymistapa luottoluokitusten estimointiin käytetty painokerroin.

5.1. Suhdannemalli

Tarkastellaan suhdannevaihteluiden vaikutuksen huomioimiseen transitiotodennäköisyyksissä kehitettyä mallia (Trück, 2008). Liitetään kunkin vuoden kuhunkin luottoluokitukseen standardinormaalijakautunut satunnaismuuttuja, seuraavan vuoden luottopistemäärä (ks. kuva 5), jonka jakauma ositetaan tulevia luottoluokituksia vastaaviin osiin siten, että kunkin osan todennäköisyys on vastaavan transition todennäköisyys transitiomatriisissa.



Kuva 5. Seuraavan vuoden luottopistemäärän standardinormaalijakauma luokalle BBB (Trück, 2008).

Luottopistemäärän yläraja xji luokitukselle j saadaan ottamalla standardinormaalijakauman kertymäfunktion käänteisfunktio rajan alapuolelle jäävästä todennäköisyysmassasta eli transitiotodennäköisyyksien pik luokitukseen j ja sitä alempiin luokituksiin j+1,...,K summasta

$$x_j^i = \Phi^{-1}(\sum_{k=j}^{K} p_{ik}). \tag{22}$$

Suhdannevaihteluiden vaikutuksen huomioimiseksi tarkastellaan, miten eri luottoluokitusten luottopistemäärärajat muuttuvat makrotaloudellisten muuttujien kuten bruttokansantuotteen tai kuluttajahintaindeksin muuttuessa. Tähän käytetään lineaarista regressiomallia

$$\Phi^{-1}(S_t) = c_0 + \sum_{j=1}^{d} c_j X_{j,t-1} + \epsilon_t\,, \quad t \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

jossa maksuhäiriöluokan luottopistemäärän yläraja $\Phi^{-1}(S_t)$ riippuu edeltävän ajanhetken makrotaloudellisista muuttujista Xj,t-1. Aiempien vuosien maksuhäiriötodennäköisyyksiä S_t vastaavien luottopistemäärärajojen $\Phi^{-1}(S_t)$ ja näitä edeltävien vuosien makrotaloudellisisten muuttujien $X_{j,t-1}$ perusteella estimoidaan mallin kertoimet c_j. Tämän jälkeen voidaan aiempien vuosien makrotaloudellisten tilastolukujen perusteella ennustaa regressiomallia käyttäen seuraavalle vuodelle maksuhäiriöluokan luottopistemääräraja ja siirtää muiden luottoluokkien luottopistemäärärajoja vastaavasti, jolloin transitiotodennäköisyydet kyseisiin luokkiin muuttuvat suhdannevaihtelun mukaisesti.

Määritellään luottosykli-indeksi

$$Z_t = \frac{\Phi^{-1}(S_t) - \mu_s}{\sigma_s} \tag{24}$$

joka kuvaa maksuhäiriötilan luottopistemäärän ylärajan $\Phi^{-1}(S_t)$ poikkeamaa aiempien vuosien keskiarvostaan μ_s jaettuna aiempien vuosien keskihajonnallaan σ_s.

Luottosykli-indeksin keskiarvo on siis nolla ja keskihajonta yksi. Regressiomallin avulla voidaan estimoida tulevan vuoden luottosykli-indeksi $\widehat{Z_t}$.

Määritellään seuraavaksi luotonmuutosindikaattori

$$Y_t = wZ_t + \sqrt{1-w^2}u_t, \tag{25}$$

jossa Z_t on luottosykli-indeksi ja u_t on standardinormaalijakautunut satunnaismuuttuja ja w sekä $\sqrt{1-w^2}$ ovat näitä vastaavat kertoimet, joissa $w \in [0,1]$. Luotonmuutosindikaattori kuvaa luottopistemäärän tulevien arvojen määräytymistä. Siihen vaikuttaa standardinormaalijakauma u_t painolla $\sqrt{1-w^2}$, ja arvoja siirtää lisäksi suhdannevaihteluiden vaikutusta kuvaava luottosykli-indeksi Z_t painolla w. Luottoluokituksesta i siirrytään maksuhäiriötilaan, jos luotonmuutosindikaattorin arvo eli luottopistemäärän tuleva arvo alittaa kyseistä transtiota vastaavan luottopistemäärän kynnysarvon T eli, jos pätee

$$\begin{aligned} P(Y_t < T) &= P\left(w\hat{Z} + \sqrt{1-w^2}u_t < T\right) \\ &= P\left(u_t < \frac{T - w\hat{Z}}{\sqrt{1-w^2}}\right) = \Phi\left(\frac{T - w\hat{Z}}{\sqrt{1-w^2}}\right), \end{aligned} \tag{26}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa u_t:n standardinormaalijakautuneisuudesta. Vastaavasti saadaan todennäköisyydet muillekin transitioille luokasta i luokkaan j ehdolla $\widehat{Z_t}$ muotoon

$$p_t\left(i,j \middle| \widehat{Z_t}\right) = \Phi\left(\frac{x_j^i - w\widehat{Z_t}}{\sqrt{1-w^2}}\right) - \Phi\left(\frac{x_{j+1}^i - w\widehat{Z_t}}{\sqrt{1-w^2}}\right), \tag{27}$$

missä x_j^i ja x_{j+1}^i ovat luottoluokan j luottopistemäärän yläraja ja alaraja frekventistisen transitiomatriisin perusteella kaavasta (22) laskettuna. Painokertoimet w tulisi valita siten, että niitä käytettäessä mallilla saataisiin lasketuksi aiempien vuosien transitiotodennäköisyydet mahdollisimman tarkasti.

Tässä työssä toteutimme yllä kuvatun suhdannemallin Matlabilla, laskimme sen avulla estimaatin vuoden 2012 transitiotodennäköisyysmatriisille ja vertasimme tuloksia sekoitemalliin ja frekventistiseen transitiomatriisiin. Vertailu on esitetty raportin ulokset-osiossa.

5.1.1. Regressiomalli

Talouden suhdanteen huomioimiseksi tarvitsemme suhdannetta kuvaavan indikaattorin

$$S_t = \Phi(\beta X_{t-1} + \epsilon_t), \tag{28}$$

missä S_t on maksuhäiriön todennäköisyys, X on makrotaloudelliset selittävät muuttujat ja Φ on standardoitu normaalijakaumafunktio. Maksuhäiriön todennäköisyys seuraavalla periodilla voidaan estimoida käyttäen kaavaa (23). Selittävinä muuttuja voidaan käyttää makroekonomisia muuttujia sekä erilaisten joukkovelkakirjojen korkospreadejä (Trück 2008). Koska aiheenasettajalta saatu data ei ole riittävä regressiomallin estimoimiseksi, käytämme tilastokeskuksen aineistoa vuosilta 1994–2011. Maksuhäiriötodennäköisyytenä käytetään regressiomallin estimoinnissa vuotuisia konkurssiin menneitä yritysten lukumääriä jaettuna vuotuisilla yritysten kokonaismäärillä. Mallin avulla estimoitua vuoden 2012 yritysten suhteellista konkurssimäärää verrataan vuosien 2008-2011 keskimääräiseen suhteelliseen konkurssimäärään. Regressiomallin selittävinä muuttujina ovat Suomen elinkustannusindeksin muutos CPI ja Suomen vuotuinen työttömyysprosentin muutos UN, liite 1. Estimointi tehtiin myös ottamalla malliin mukaan selittäviksi muuttujiksi vuotuinen bruttokansantuotteen suhteellinen muutos sekä yksityistalouksien säätöjen vuosittainen suhteellinen muutos, mutta kumpikaan näistä selittävistä muuttujista ei parantanut mallin tilastollisia tunnuslukuja selvästi, jotta ylimääräisten vapausasteiden lisääminen olisi ollut perusteltua.

Estimoidun regressiomallin selitysaste $R^2 = 0.92$, F-arvo 82.70 ja p-arvo $1.76 * 10^{-8}$. Mallin selitysaste on varsin korkea sekä se on tilastollisesti merkitsevä, koska p-arvo on hyvin pieni. Mallin selittävien muuttujien statistiset tulokset ovat taulukossa 4.

Taulukko 4. Regressiomallin statistiset tulokset mallin parametreille.

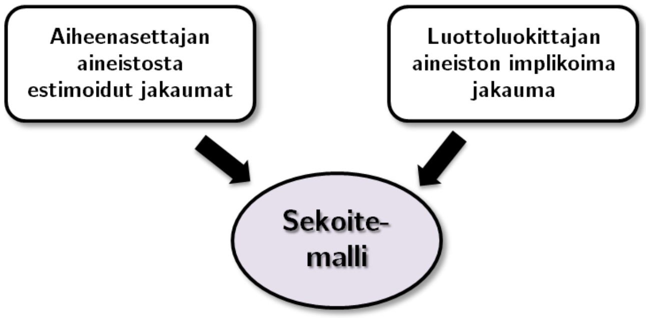
	c	t-arvo	p-arvo	95%-alaraja	95%-yläraja
c_0	-0,003			-0,006	-0,001
CPI	0,091	3,2085	0,0063	0,030	0,152
UN	0,129	12,7723	0,0000	0,107	0,151

Tilastokeskuksen aineistosta laskettu yritysten konkurssien suhteellinen osuus vuosina 2008-2011 oli 0.88%. Estimaatti vuoden 2012 konkurssien suhteelliselle osuudelle on 0.97% ja sille saadaan 95%-luottamusväli käyttäen talukossa 4 esitettyjä 95%-ala –ja ylärajoja. Luottamusväli on [0.0032 0.162]. Se on varsin leveä ja sen vaikutuksista estimoituihin transitiotodennäköisyyksiin käsitellään tulokset kappaleessa.

5.2. Sekoitemalli

5.2.1. Esittely

Sekoitemallin perusideana on mallintaa luottoluokitusten siirtymätodennäköisyyksiä ehdollisten luottoluokituskohtaisten todennäköisyysjakaumien avulla. Nämä todennäköisyysjakaumat muodostetaan yhdistämällä, eli sekoittamalla, aiheenasettajan aineistosta estimoidut jakaumat ulkopuolisen luokittajan (Fitch) transitiomatriisista luettaviin luokkakohtaisiin jakaumiin. Tämä lähtöasetelma on visualisoitu kuvassa 6.



Kuva 6. Sekoitemallin muodostuminen.

Aiheen asettajan aineistosta kullekin luottoluokalle $i = 1, \dots, 18$ estimoidaan todennäköisyysjakauma f_i, joka määrää siirtymätodennäköisyydet muihin tai samaan luottoluokkaan f_{ij}, $j = 1, \dots, 19$. Luokasta *i* voidaan siirtyä 19 eri luokkaan, koska luokituksen muuttumisen (samana pysymisen) lisäksi on mahdollista siirtyä maksuhäiriöluokkaan.

Jakaumat luokituksen siirtymille estimoidaan ensin jatkuvina, jotka on rajoitettu reaaliakselin välille jolla luokitukset sijaitsevat, eli $[1,19]$. Tällaisia rajoitetun välin jatkuvia todennäköisyysjakaumia kutsutaan *typistetyiksi todennäköisyysjakaumiksi.* Koska luottoluokat ovat kuitenkin diskreettejä, täytyy jatkuvista jakaumista muuntaa diskreeteiksi siirtymäjakaumiksi. Tämä voidaan toteuttaa esimerkiksi kertymäfunktion avulla. Jotta jatkuva jakauma voidaan estimoida täysin diskreetistä havaintoaineistosta, *hajautetaan siirtymähavaintoja* toisistaan. Tällöin havaintojen määrä kasvaa ja jakauman estimointi helpottuu. Esimerkiksi 30 havaintoa siirtymästä luokasta 10 luokkaan 12 on ilman hajautusta vain yksi havainto (30 per havainnot tämän luokan siirtymistä yhteensä), mutta hajautuksen kanssa 30 havaintoa.

Estimoidut diskreetit transitiojakaumat (todennäköisyysjakauma luottoluokituksen muutokselle annettuna nykyinen luokitus) yhdistetään lopulta ulkopuolisen luokittajan vastaaviin transitiojakaumiin. Koska molemmat jakaumat ovat diskreettejä, voidaan ne yhdistää esimerkiksi painotettuna summana (lineaarikombinaatio).

5.2.2. Teoria

Sekoitemallissa jatkuvat transitiojakaumat määritellään typistettyinä todennäköisyysjakaumina. *Typistetty todennäköisyysjakauma* määrää satunnaismuuttujan X todennäköisyydet rajoitetulla välillä $X \in [a, b]$, missä $-\infty < a < b < \infty$. Oletetaan, että X seuraa todennäköisyysjakaumaa $f(x), \in \mathbb{R}$, jonka kertymäfunktiota merkitään F ja parametreja $\theta \in \mathbb{R}^n$. Tällöin typistetty todennäköisyysjakauma välillä $[a, b]$ on määritelty seuraavasti

$$p(x \mid a \leq X \leq b) = \frac{f(x \mid \theta)}{F(b \mid \theta) - F(a \mid \theta)} \tag{29}$$

ja vastaava kertymäfunktio

$$P(x \mid a \leq X \leq b) = \frac{F(x \mid \theta) - F(a \mid \theta)}{F(b \mid \theta) - F(a \mid \theta)}. \quad (30)$$

Jakaumatyyppeinä tässä työssä käytetään normaali- ja t-jakaumaa. Molemmat jakaumat ovat symmetrisiä ja koostuvat kahdesta parametrista: moodi ja hajonta parametrista. Nämä parametrit määräävät mihin jakauma on keskittynyt ja kuinka leveä tai kapea se on.

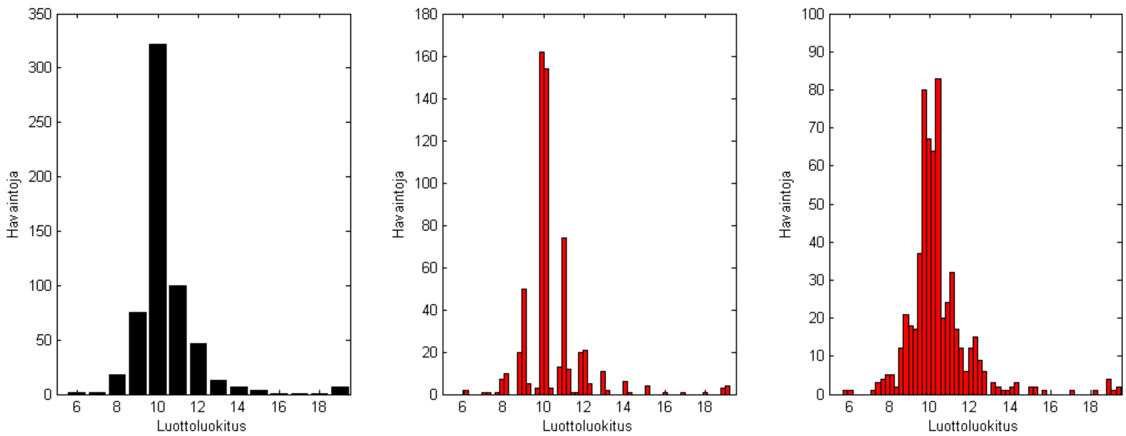
Koska käytettävät todennäköisyysjakaumat ovat parametrisia malleja, palautuu niiden estimoiminen (sovittaminen aineistoon) parametrien estimointiin. Toisin sanoen kaavan (29) mukainen typistetty todennäköisyysjakauma, jossa jakaumatyypiksi on valittu normaali- tai t-jakauma, sovitetaan aineistoon estimoimalla parametrit θ. Parametrien estimointi toteutetaan tässä työssä suurimman uskottavuuden menetelmällä, jossa etsitään parametriarvot θ^*, jotka maksimoivat havaitun aineiston y uskottavuuden $p(y|\theta)$, eli ratkaistaan optimointiongelma

$$\max_{\theta} \ p(y|\theta).$$

Tämä optimointiongelma ratkaistaan tässä työssä numeerisesti käytettävän Matlab ohjelmiston valmisfunktiolla.

Jatkuvan todennäköisyysjakauman sovittamista joukkoon diskreettiin havaintojoukkoon voidaan tukea hajauttamalla havaintoja. Perusideana on hajauttaa siirtymään $i \to j$ liittyvät n_{ij} havaintoa välille $[j - \delta, j + \delta]$, $\delta \leq \frac{1}{2}$. Hajauttaminen voidaan toteuttaa esimerkiksi lisäämällä pientä kohinaa ("jitteriä") kuhunkin siirtymä havaintoon joukkoon, eli korvataan alkuperäiset j havaintoa kohinaisilla havainnoilla $\tilde{j} = (j + \delta)$, $\delta \sim N(0, \sigma)$, jossa kohinatermi δ generoidaan kaikille havainnolle. Käytettävä hajonta σ tulee valita tässä tarpeeksi pieneksi, jottei eri siirtymähavainnot mene sekaisin. Toinen tapa toteuttaa aineiston hajauttaminen on poimia siirtymät j kappaletta siirtymiä $i \to j$ tasajakaumasta väliltä $\left[j - \frac{1}{2},\ j + \frac{1}{2}\right]$ annettuna luokka i.

Hajauttamisen vaikutusta on havainnollistettu kuvissa 7, joissa kuvat vasemmalta oikealle esittävät alkuperäisiä havaintoja, gaussisesti hajoitettuja ja tasapoiminnalla hajoitettuja siirtymähavaintoja luokalle 10.



Kuva 7. Vasemmalla alkuperäiset havainnot, keskellä gaussisesti hajautetut ja oikealla tasapoiminnalla hajautetut havainnot luokan 10 luokitussiirtymistä.

Luottoluokille 1-14 estimoidaan yksi typistetty jakauma, eli kaksi parametria per luokka, ja luokille 15-18 kahden typistetyn jakauman sekoite, eli viisi parametria per luokka (valituilla jakaumilla). Paremmilla luottoluokilla yksi jakauma riittää kuvaamaan havaittuja siirtymiä, mutta huonojen luokitusten kohdalla aineisto on kaksi moodinen (havaittavissa ”default”-kyttyrä), jota ei voida millään mallintaa yksi moodisen jakauman avulla.

Usean jakauman sekoite *h* voidaan muodostaa yleisesti

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i(x|\theta_i), \qquad a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1. \tag{31}$$

Kahden jakauman tapauksessa voidaan yksinkertaisesti summasta

$$h(x) = a p_1(x|\theta_i) + (1-a) p_1(x|\theta_2), \ \ a \in \ [0,1]. \tag{32}$$

Relaatiota (17) sovelletaan sekä estimoitujen jatkuvien transitiojakaumien yhdistämisessä luokille 15-18, sekä kaikkien luokkien estimoidun diskreetin jakauman yhdistämisessä ulkopuolisen luokittajan diskreetteihin jakaumiin. Diskreetti transitiotodennäköisyys f_{ij} siirtymälle luokasta *i* luokkaan *j*, $i \to j$, voidaan laskea vastaavan luokan jatkuvasta transitiojakaumasta muodostetun kertymäfunktion P_i avulla

$$f_{ij} \ = P_i(x \leq j + \frac{1}{2}) - P_i(x \leq j - \frac{1}{2}) \tag{33}$$

Ulkoisen luokittajan (Fitch) tarjoaman transitiomatriisin hyödyntämiseksi matriisiin on lisättävä yksi luokitusluokka lisää, koska Pohjolan ja Fitch:n luottoluokitusjärjestelemät sisältävät eri määrän luottoluokkia: Pohjolan järjestelmä sisältää 18 luokkaa ilman default-luokkaa kun taas Fitch:n järjestelmä sisältää 17 luokkaa ilman default-luokkaa. Ulkoisen luokittajan matriisiin päädyttiin lisäämään uusi luokka luokkien B- ja CCC-C väliin. Kyseiset luokat vastaavat ulkoisen luokittajan matriisissa huonointa ja toisiksi huonointa luokkaa, jos default-luokkaa ei huomioida. Ylimääräinen luokka päädyttiin lisäämään juuri tähän kohtaan, koska paremmat luokat vastasivat hyvin OP-pohjolan luokituksia. Vastaavasti Fitchin matriisin luokkien B- ja CCC-C välillä transitiotodennäköisyyksissä havaittiin jyrkkä muutos, jolloin ylimääräinen luokka tasoitti tätä muutosta. Ylimääräisen luokan todennäköisyydet laskettiin luokkien B- ja CCC-C keskiarvosta, eli kaavasta

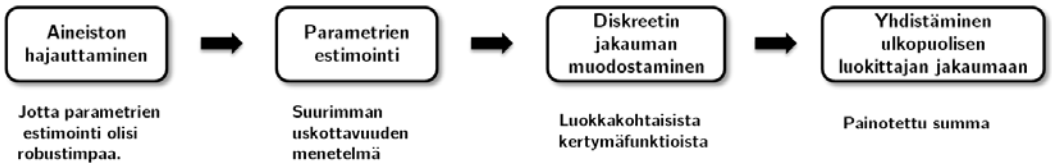
$$P_{i,add} = \frac{P_{i,B-} + P_{i,CCC-C}}{2}, \ \ i = 1,..,19. \tag{34}$$

Ulkoisen luokittajan matriisi lisätyllä luokalla on esitetty liitteessä 2.

5.2.3. Toteutus

Esitetään vielä lopuksi yhteenveto sekoitemallin muodostamisesta, joka on esitetty vaiheittain. kuvassa 8. Ensiksi diskreettiä havaintoaineistoa hajautetaan, joko tasapoiminnalla tai gaussisella hajautuksella jatkuvien jakaumien estimoinnin tukemiseksi.

Seuraavassa vaiheessa kunkin luokitusluokan hajautettuihin siirtymähavaintoihin sovitetaan todennäköisyysjakauma. Sovitettavat jakaumat ovat parametrisia, jolloin jakauman sovittaminen vastaa parametrien estimointia. Luokille $i = 1, \dots, 14$ sovitetaan joko typistetty normaali- tai t-jakauma, jolloin luokkakohtaisia parametreja on estimoitavana kaksi kappaletta (moodi- ja hajontaparametri). Luokille $i = 15, \dots, 18$ sovitetaan kahden typistetynjakauman sekoite, jolloin estimoitavia parametreja on viisi kappaletta (kummallekin jakaumalle moodi- ja hajontaparametrit joiden lisäksi jakaumien painotusparametri). Parametrit estimoidaan suurimman uskottavuuden menetelmällä.



Kuva 8. Kaavio sekoitemallin toteutuksesta.

Parametrien estimoinnin jälkeen lasketaan kullekin luokitusluokalle kertymäfunktio relaation (30) mukaisesti. Kertymäfunktioiden avulla voidaan laskea diskreetit siirtymätodennäköisyydet kaavan (33) mukaisesti.

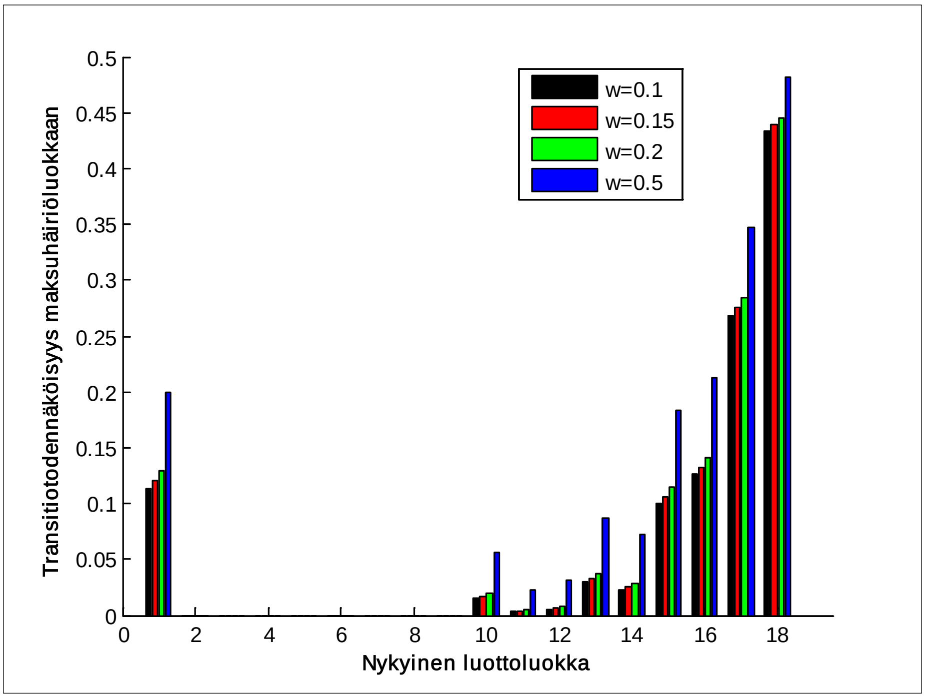
Viimeisessä vaiheessa estimoidut diskreetit transitiojakaumat yhdistetään ulkopuolisen luokittajan vastaaviin jakaumiin painotetulla summalla (32).

6. Validointi

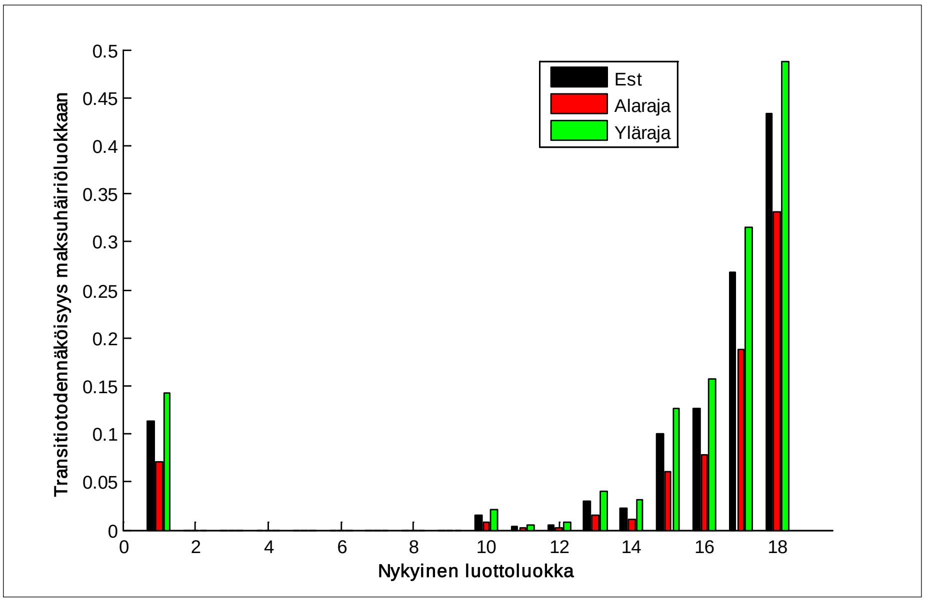
6.1. Suhdannemallin estimointi

Konkurssien suhteellinen osuus kaikista yrityksistä on siis estimoitu olevan vuonna 2012 9.82% suurempi kuin vuosien 2008-2011 vastaava keskiarvo. Aiheenasettajan aineiston vuosien 2008-2011 maksuhäiriötilaan siirtyneiden yritysten osuus oli 1.87%, joten estimaatti vuoden 2012 maksuhäiriöluokkaan siirtymiselle on 2.05%.

Kuvassa 9 on esitetty vuoden 2012 estimoidut todennäköisyydet maksuhäiriöluokkaan siirtymiselle eri w:n arvoilla. Aineistosta johtuen estimoidut todennäköisyydet luokasta 1 maksuhäiriöluokkaan siirtymiselle ovat suuremmat kuin vastaavat siirtymätodennäköisyydet luokista 2-9. Kuvasta voidaan selkeästi havaita, että parametrin w kasvattaminen johtaa suurempiin todennäköisyyksiin maksuhäiriöluokkaan siirtymiselle. Eniten parametri w vaikuttaa luokkiin, joissa on alhainen todennäköisyys siirtyä maksuhäiriöluokkaan, luokat 10-14. Näissä luokissa siirtymätodennäköisyyden kasvu on noin 29-50% kun $w = 0.1$ korvataan $w = 0.2$. On siis varsin selvää, että mallin antamat lopputulokset riippuvat hyvin paljon kuinka tarkasti parametri w voidaan optimoida. Kirjallisuudessa (Trück 2008) käytetyt w:n arvot ovat optimointittavasta riippuen välillä [0.03 0.25]. Myöhemmissä tarkasteluissa käytämme arvoa 0.1.



Kuva 9. Estimoidut todennäköisyydet maksuhäiriöluokkaan siirtymiselle vuonna 2012 eri w:n arvoilla.



Kuva 10. Estimoidut todennäköisyydet maksuhäiriöluokkaan siirtymiselle vuonna 2012. Ylä- ja alarajat on saatu käyttämällä regressiomallin 95%-luottamusrajoja.

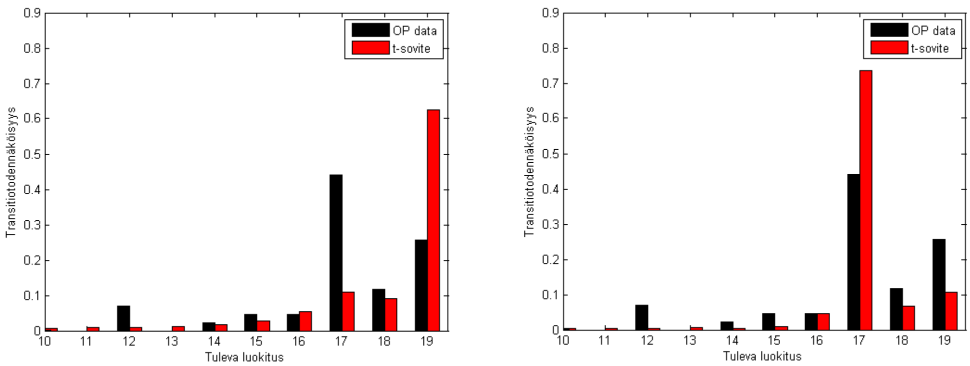
Kuvasta 10 nähdään miten regressiomallin 95%-luottamusrajat vaikuttavat estimoituihin vuoden 2012 siirtymätodennäköisyyksiin. Suurin suhteellinen ero estimoidun todennäköisyyden ja luottamusvälin alarajan välillä on luokissa 10-14. Näissä luokissa siirtymätodennäköisyys on noin pienempi 49-57%. Vastaavasti ylärajoista suurin suhteellinen ero on myös luokissa 10-14. Siirtymätodennäköisyyksien ylärajat ovat 38-50% suuremmat kuin estimoidut arvot.

Pienin luottamusväli siirtymätodenäköisyydellä on luokassa 18, jossa alaraja on 23% pienempi ja yläraja 13% suurempi kuin estimoitu todennäköisyys. Todennäköisyys siirtyä luokasta 1 maksuhäiriöluokkaan on välillä [0.070 0.143]. Varsinkin yläraja on kohtuullisen suuri, mutta tämä on seurasta aiheenasettajan datan laadusta. Sama ilmiö on nähtävissä kuvassa 8. Estimoidut transitiomatriisit 95%-luottamusrajoineen parametrin arvolla $w = 0.1$ on esitetty liitteessä 4.

6.2. Sekoitemallin validointi

6.2.1. Datan hajauttamisen vaikutus

Tutkitaan aluksi datan hajauttamisen mahdollisuutta sekoitemallissa. Datan hajauttaminen esiteltiin kappaleessa 5.2.2. Datan hajauttaminen havaittiin tarpeelliseksi jo varhaisessa vaiheessa mallia rakennettaessa. Ilman hajauttamista jakaumien estimointi ei onnistunut jokaiselle luokalle. Toisaalta useissa luokissa, joissa estimointi onnistui, ilman hajauttamista ei saatu käypiä tuloksia. Näissä luokissa tulokset vaihtelivat erillisillä laskentakerroilla, vaikka laskennan alkuparametrit pidettiin samoina. Ilmiötä on havainnollistettu kuvassa 11 luokalle 17. Kuvassa on esitetty dataan sovitettu t-jakauma ilman hajauttamista kahdella eri estimointikerralla samoilla alkuparametreilla. Tuloksissa ei ole käytetty ulkopuolisen luokittajan dataa. Vaikka laskennan alkuparametrit pidetään samoina, sovitetun jakauman parametrit vaihtelevat voimakkaasti. Koska ilman hajauttamista luottoluokitusmuutosten havaintopisteet kasaantuvat diskreetteihin pisteisiin, parametrien estimointi ajautuu ongelmiin. Näin ollen hajauttamisen käyttö on perustelua sekoitemallissa.

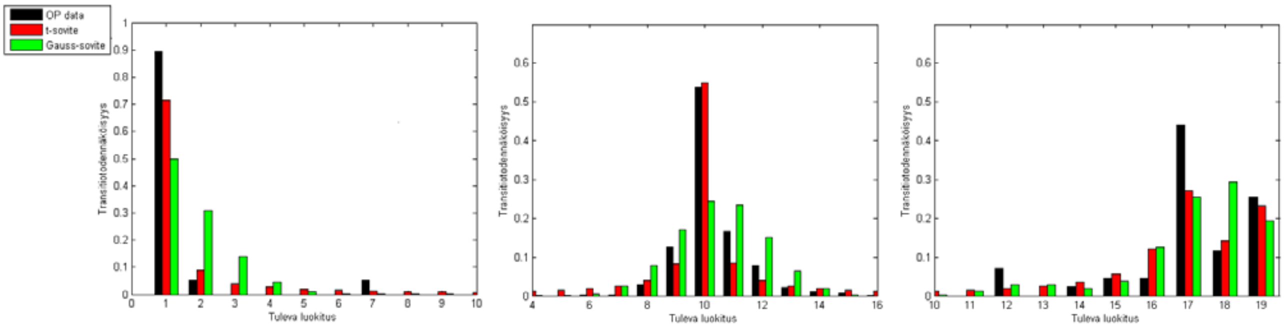


Kuva 11. Jakaumasovite kahdella eri laskentakerralla ilman hajauttamista

Varsinainen hajauttaminen oli mahdollista sekoitemallissa joko normaalijakauma- tai tasajakaumapohjaisesti. Tasajakaumapohjaisella hajauttamisella havaittiin samoja ongelmia kuin ilman hajauttamista. Vaikka alkuparametrit pidettiin samoina, lopullisen jakaumasovitteen parametrit vaihtelivat liikaa. Käytettäessä normaalijakaumapohjaista hajauttamista samaa ongelmaa ei muodostu. Samoilla alkuparametreilla eri laskentakerroilla lopullinen sovite pysyy samana. Tasajakaumapohjaisen hajauttamisen voidaan nähdä hajauttavan datapisteitä liian leveälle välille. Normaalijakaumapohjainen hajauttaminen keskittää pisteet tiheämmin, jolloin parametrien estimointi onnistuu. Näin ollen lopullisessa sovitemallissa hyödynnetään datan hajauttamista ja nimenomaan normaalijakaumapohjaista hajauttamista.

6.2.2. Jakauman valinta

Perehdytään seuraavaksi sekoitemallissa käytettävän jakauman valintaan. Sekoitemalliin valittiin jakaumiksi typistetty normaalijakauma ja t-jakauma. Tutkitaan jakauman vaikutusta jakaumasovitteeseen kolmella eri luottoluokituksella. Kuvassa 12 on esitetty sovitteen antamat transitiotodennäköisyydet luottoluokille 1, 10 ja 17. Jakauman sovittamisessa on käytetty normaalijakaumapohjaista diskretointia. Ulkopuolisen luokittajan dataa ei ole käytetty. Kuvassa on mustalla merkitty alkuperäiset op:n datasta cohort-menetelmällä lasketut frekventistiset transitiotodennäköisyydet. Punaisella värillä on esitetty sovitteen antamat tulokset t-jakauma käytettäessä ja vihreällä värillä normaalijakaumaa käytettäessä.



Kuva 12. Sovite luokille 1, 10 ja 17 normaalijakaumalla ja t-jakaumalla

Luokan 1 kohdalla havaitaan, että normaalijakaumaa käytettäessä todennäköisyys pysyä samassa luokassa jää hyvin pieneksi. Vastaavasti t-jakauma on huipukkaampi ja antaa paremmin op:n dataa vastaavaan todennäköisyyden. Normaalijakaumaa käytettäessä todennäköisyyksille siirtyä pois alkuperäisestä parhaasta luottoluokituksesta saadaan liian suuria arvoja. T-jakauman sovite on selvästi parempi.

Luokan 10 kohdalla havaitaan samanlaisia tuloksia kuin luokan 1 kohdalla. Normaalijakauma ei ole tarpeeksi huipukas, jolloin todennäköisyys pysyä samassa luottoluokituksessa jää liian pieneksi ja vastaavasti todennäköisyydet siirtyä pois alkuperäisestä luottoluokituksesta tulevat liian suuriksi. T-jakauma sen sijaan noudattelee hyvin op:n datan tuloksia.

Luokalle 17 t-jakauma tuottaa myös parempia tuloksia. Kyseinen luokka eroaa luokista 1 ja 10, koska luokalle 17 estimoidaan kahden jakauman summa merkittävän default-todennäköisyyden takia. T-jakauman avulla default-todennäköisyyden aiheuttama toinen huippu saadaan huomioitua, mikä normaalijakaumalla ei onnistu. Diagonaalitodennäköisyys jää kummallakin jakaumalla hieman pieneksi, mutta kyseinen ongelma korjaantuu seuraavassa kappaleessa esitellyllä ulkoisen luokittajan datan hyödyntämisellä

Normaalijakaumaa käytettäessä jakaumaparametrien estimointi ei myöskään onnistunut kaikille luokille ja monissa luokissa iteroinnin lopputulos vaihteli liikaa. T-jakaumaa käytettäessä kyseisiä ongelmia ei ollut, joten sekoitemallin kohdalla on perusteltua käyttää t-jakaumaa.

6.2.3. Ulkopuolisen luokittajan painotus

Viimeinen vaihe sekoitemallin rakentamisessa on valita painokerroin $a \in [0,1]$, joka määrää missä suhteessa aineistosta estimoitua transitiojakaumaa ja ulkopuolisen luokittajan transitiomatriisin implikoimaa jakaumaa painotetaan luottoluokkakohtaisesti. Kuten mallin esittelyn yhteydessä esitetään, estimoidut diskreetit luokkakohtaiset jakaumat f_i ja ulkopuolisen luokittajan vastaava jakaumat g_i siirtymätodennäköisyyksille yhdistetään yksinkertaisena lineaarikombinaationa soveltaen relaatiota 17

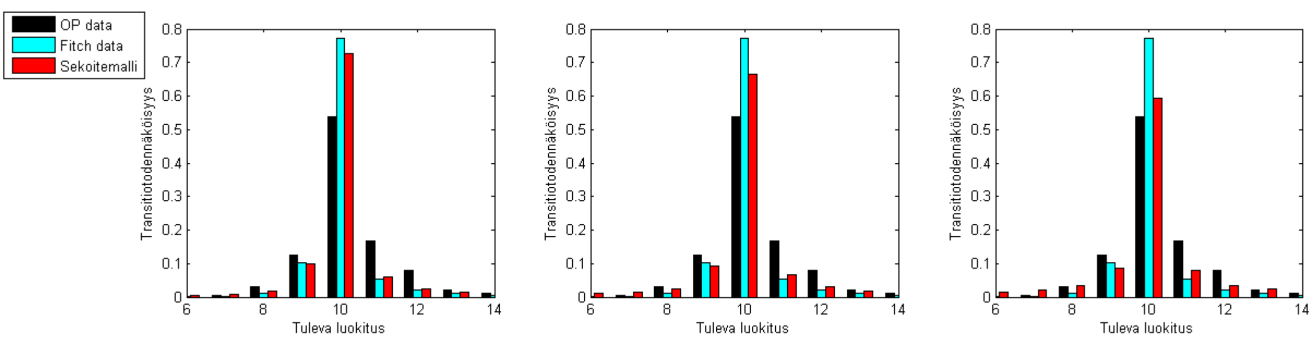
$$p_{ij} = af_{ij} + (1-a)g_{ij}, \quad i = 1, \dots, 18, \; j = 1, \dots, 19$$

missä indeksi i on luokka, jonka transitiojakaumaa tarkastellaan, ja j tuleva luokka, johon siirrytään.

Painokertoimen a valinnan vaikutus on hyvin suoraviivaisesti tulkittavissa: suuremmalla a arvolla estimaattia painotetaan enemmän, jolloin lopullinen transitiotodennäköisyysjakauma on lähempänä alkuperäistä aineistoa. Pienemmällä w annetaan enemmän painoa ulkopuolisen luokittajan aineistolle, ja transitiojakauma kalibroituu voimakkaan sen mukaan.

Kuvissa 13 havainnollistettu luokan 10 siirtymäjakaumalle painokertoimen w vaikutusta arvoilla 0.2, 0.5 ja 0.8 lukien vasemmalta oikealle. Aiheenasettajan aineistosta on ensin estimoitu jakaumat luokituksen siirtymille käyttäen gaussista hajautusta hajontaparametrilla $\sigma = 0.1$ ja jakaumatyyppinä t-jakaumaa. Tämän jälkeen estimoidut siirtymätodennäköisyydet on yhdistetty ulkopuolisen luokittajan todennäköisyyksiin yllä esitetyn mukaisesti käyttäen pientä (0.2), keskisuurta(0.5) ja suurta(0.8) painokerroinarvoa.

Luokan 10 kohdalla sekoitemalli kalibroituu selvästi voimakkaammin ulkopuolisen luokittajan jakaumaan oikeastaan vain siirtymätodennäköisyyden $p_{10,10}$ (pysytään luokassa 10) kohdalla. Tämä johtuu siitä, muiden transitioiden kohdalla estimoitu jakauma ja ulkopuolisen luokittajan jakauma ovat hyvin lähellä toisiaan. Näin ei luonnollisestikaan ole kaikkien luokkien kohdalla, etenkään huonompien luokitusten, joissa painokertoimen valinnalla on suurempi merkitys useammalle siirtymätodennäköisyydelle per jakauma.



Kuva 13 Luokan 10 transiotiotodennäköisyysjakauma painokertoimen arvoilla $\boldsymbol{a = 0.2}$ (vasemmalla), $\boldsymbol{a = 0.5}$ (keskellä) ja $\boldsymbol{a = 0.8}$ (oikealla).

Painokertoimen valinta jätetään tehdyn pintapuolisen tarkastelun perusteella mallin parametriksi, jonka valitsee päätöksentekijä tai mallin käyttäjä. Perusteluna tälle esitetään, että tämän parametrin tulkinta on erittäin helppoa ja vaikutus hyvin läpinäkyvää, jolloin kyseinen parametri voidaan valita vallitsevan näkemyksen mukaisesti. Tässä työssä painokertoimelle käytetään arvoa $a = 0.5$. Tällä valinalla sekoitemallilla lasketut estimaatit transitiotodennäköisyyksille ovat kompromisseja aiheenasettajan aineistosta lasketun estimaatin ja ulkopuolisen luokittajan jakauman välillä.

Karkeasti parametrin valinnasta voidaan todeta, että koska luottoluokittajan jakaumat on laskettu keskiarvona suuresta aineistosta pitkältä aikaväliltä, voidaan niiden ajatella edustavan stabiilia keskimääräistä tilannetta siirtymien osalta per luottoluokka. Turbulentimpina aikoina nämä jakaumat ovat hyvin todennäköisesti turhan konservatiivisia, jolloin niille tulisi antaa vähemmän painoa. Toisaalta ne edustavat robustia pitkän aikavälin keskiarvoa transitiotodennäköisyyksille.

7. Tulokset

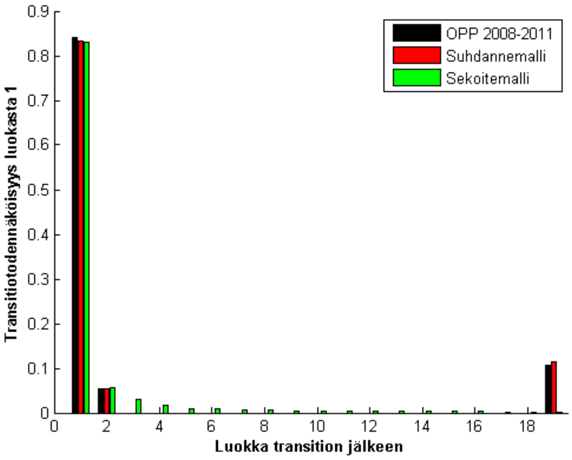
Tässä osiossa verrataan suhdanne- ja sekoitemallilla estimoituja luottoluokitusten transitiomatriiseja toisiinsa. Koska kokoa 18×19 olevien matriisien vertailu mielekkäästi on hankalaa, toteutetaan vertailu transitiomatriisien olennaisimpien piirteiden perusteelta pitäen mielessä luottoluokitus viitekehys.

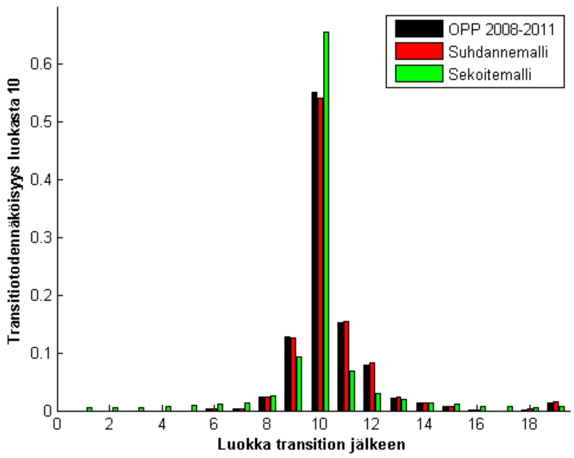
Vertailun kohteiksi on valittu kolmen tyyppiluokan vertailu, jossa verrataan toisiinsa ”hyvälle” (luokitus 1), ”keskiverrolle” (luokitus 10), ja ”huonolle” (luokitus 17) estimoituja transitiojakaumia. Lisäksi esitetään molemmilla menetelmillä estimoitujen transitiomatriisien diagonaalitodennäköisyyksiä (luokitus ei muutu) sekä maksuhäiriösaraketta (todennäköisyys siirrytään maksuhäiriöluokkaan annettuna luokka).

Estimoidut tulokset tuotetaan työssä esitetyillä menetelmillä, joiden ominaisuudet ja parametrit on valittu validoinnin perusteella. Sekoitemallissa käytetään t-jakaumaa, gaussista datan hajautusta hajautusparametrilla $\sigma = 0.1$ ja painokerrointa $a = 0.5$ ulkopuolisen luokittajan jakaumille. Suhdannemallissa käytetään estimoitua regressiomallia sekä parametria $w = 0.1$. Lähtökohtana oleva transitiomatriisi on laskettu aiheenasettajan aineistosta kappaleessa 4.1.2 kaavan (5) mukaan. Tämä transitiomatriisi on esitetty liitteessä 5.

7.1. Tyyppiluokkien vertailu

Tarkastellaan ensin suhdanne- ja sekoitemalleilla estimoituja transitiojakaumia luokkien 1 ja 10 siirtymätodennäköisyyksille. Nämä transitiojakaumat on esitetty kuvissa 8.1.1. Luokan yksi transitiojakaumaa estimoitaessa sekoitemallilla siivottiin pois havainnot maksuhäiriöön siirtymisestä, koska näillä erittäin poikkeavilla havainnoilla oli aivan liian suuri vaikutus estimoituun jakaumaan (hajonta kasvoi huomattavasti, koska havaintoja on niin vähän tämän luokan siirtymistä). Tämä on syynä suurimmalle erolle menetelmien välillä luokan yksi jakauman estimoinnissa. Muuten jakaumat muistuttavat hyvin paljon toisiaan, pienenä erona ollen, että sekoitemallilla todennäköisyys siirtyä huonompaan luokkaan kuin kaksi vaimenee sileästi pois, kun taas suhdannemallin estimaatissa nämä todennäköisyydet ovat nollaa, koska havaintoaineistossa ei havaintoja ko. siirtymistä ole.

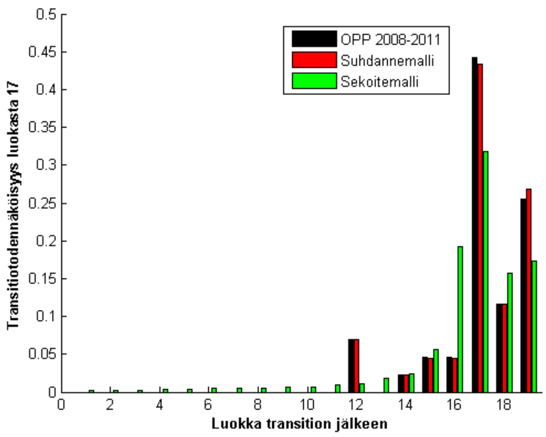




Kuva 14. Transitiojakaumat laskettuna alkuperäisestä aineistosta frekventisesti, suhdannemallilla ja sekoitemallilla luokalle yksi (vasemmalla) ja kymmenen (oikealla).

Luokan 10 transitiojakauma on esitetty myös kuvassa 14. Sekoitemallin estimaatti on selvästi huipukkaampi tällä luokalla (ja muilla "keskiverto" luokilla), kuin suhdannemallin estimaatti. Huipukkuus näkyy paitsi korkeampana todennäköisyytenä pysyä samassa luokassa myös selvästi pienempinä todennäköisyyksinä millekään transitiolle. Syynä tähän mallien väliseen eroon on ennen kaikkea sekoitemallin hyväksikäyttämä ulkopuolisen luokittajan jakauma, jonka voi tulkita olevan pitkän aikavälin keskiarvo transitiojakaumalle. Tämä keskiarvojakauma on vielä sekoitemallin estimaattiakin huipukkaampi, jonka seurauksena aineistosta sekoitemallilla estimoitu jakauma kalibroituu huipukkaammaksi.

Viimeisenä tyyppiluokkana tarkastellaan ns. "huonoa" luokkaa, jonka luokitus on toiseksi huonoin (17, aiheenasettajan asteikolla 11,5). Tämän luokan kohdalla menetelmien estimaatit poikkeavat huomattavasti toisistaan ja ne on esitetty kuvassa 8.2.2.



Kuva 15. Transitiojakaumat luokalle 17 laskettuna alkuperäisestä aineistosta frekventisesti, suhdannemallilla ja sekoitemallilla.

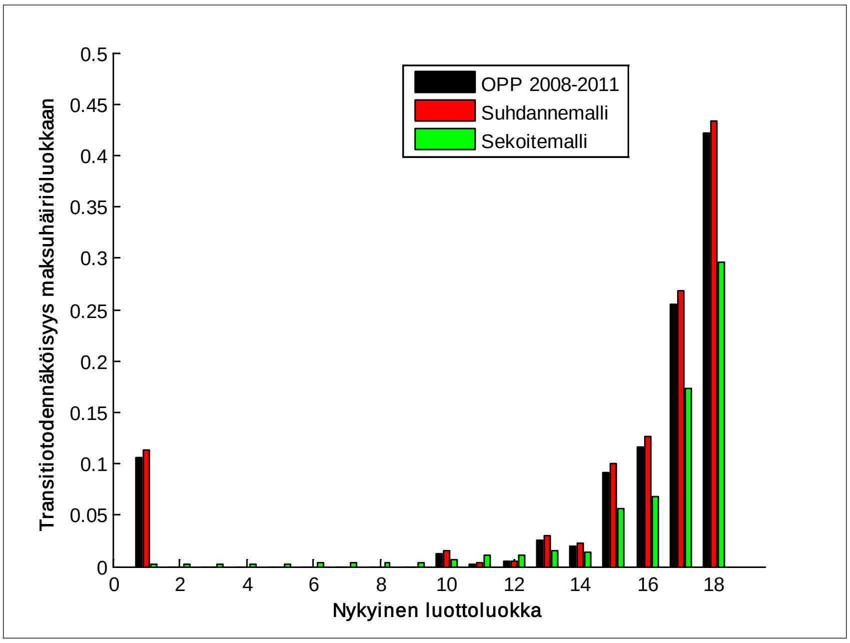
Kuvaa 15 tarkasteltaessa voi ensimmäisenä huomata aiheenasettajan aineistossa olevan poikkeuksellisen piikin siirtymälle $p_{17,12}$. Tämä näkyy jakaumassa merkittävästi ennen kaikkea havaintojen vähyyden vuoksi, koska moinen siirtymätodennäköisyys ei ole missään nimessä koherentti tarkasteltavan ilmiön puitteissa. Kuvassa näkyy selvästi myös kyttyrä, koska siirtymän $p_{17,19}$ todennäköisyys, eli siirtyminen maksuhäiriöluokkaan, on selvästi suurempi kuin siirtymän $p_{17,18}$. Tämä vaikuttaa luonnolliselta, koska maksuhäiriöluokka on absorboiva, ja voidaankin ajatella, että maksuhäiriöluokkaan kerääntyy kaikki siirtymät, jotka menisivät huonompaan luokkaan kuin maksuhäiriö luokitus.

Tarkasteltaessa suhdannemallin estimaattia transitiojakaumalle huomataan, että se sovittuu aiheenasettajan aineistoon todella tarkasti. Estimaatti voidaan todeta olevan ylisovittunut, koska se mallintaa täysin poikkeavan siirtymän $p_{17,12}$ myös todella tarkasti. Suhdannevaihtelu ei heiluta estimaatteja kovinkaan paljoa, koska myös siirtymät maksuhäiriöluokkaan vastaavat aineistosta frekventisesti (havaintojen suhteellinen osuus) laskettuja siirtymätodennäköisyyksiä.

Sekoitemallin estimaatti luokan 17 transitiotodennäköisyyksille poikkeaa suhdannemallin estimaatista erittäin paljon. Sekoitemalli onnistuu mallintamaan jossain määri havaitun kyttyrän, mutta todennäköisyys $p_{17,17}$., jolla siirtymää ei tapahdu jää aivan liian pieneksi. Myös todennäköisyydet siirtymille luokkiin 16 ja 19 (maksuhäiriö) poikkeavat sekä aineistosta että suhdannemallin estimaatista erittäin paljon. Osittain nämä tulokset johtuvat siitä, että myös ulkopuolisen luokittajan transitiojakauma kyseiselle luokalle poikkeaa havaitusta jakaumasta melko paljon. Tämä kalibroi jo lähtökohtaisesti sekoitemallin estimaattia eri suuntaan. Toisena syynä huonolle sovitteelle ovat poikkeavat havainnot siirtymisestä luokkaan 12, jotka tuovat aineistoon selvästi lisää hajontaa, jolloin estimoidut todennäköisyysjakaumat eivät ole tarpeeksi huipukkaita.

7.2. Maksuhäiriöluokan ja diagonaalien vertailu

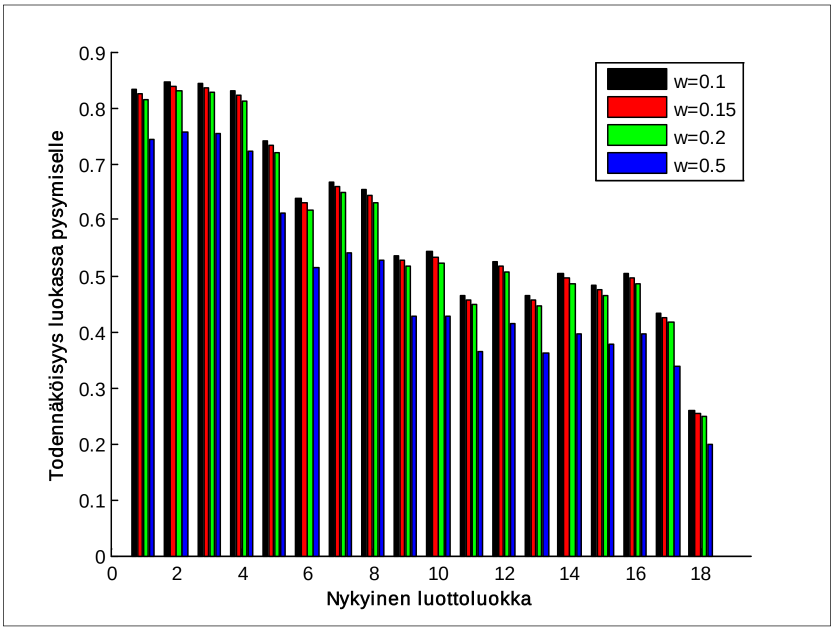
Todennäköisyydet siirtyä kustakin luottoluokasta maksuhäiriöluokkaan suhdannemallin, sekoitemallin ja frekventistisesti lasketun transitiomatriisin perusteella on esitetty kuvassa 16. Siitä nähdään, että kunkin mallin antamat transitiotodennäköisyydet luokista 2-9 maksuhäiriöluokkaan ovat selvästi alle 1 %. Korkeista luokituksista suoraan maksuhäiriöön siirtyminen on siis pääsääntöisesti hyvin harvinaista. Luokasta 10 luokkaa 18 kohti siirryttäessä transitiotodennäköisyys maksuhäiriöluokkaan kasvaa kuitenkin luokka luokalta yhä jyrkemmin. Luokille 10-14 se on noin 1-2%, luokille 15-16 noin 12 % (sekoitemallissa 5 %), luokalle 16 noin 14 % (sekoitemallissa 5 %), luokalle 17 noin 25 % (sekoitemallissa 15 %) ja luokalle 18 noin 45 % (sekoitemallissa 30 %). Maksuhäiriöön siirtymisen todennäköisyyden kiihtyvä kasvu luottoluokan huonontuessa kuvaa sitä, kuinka taloudellisen tilanteen heikentyessä on yhä todennäköisempää, että ongelmat syvenevät entisestään, selviytyminen on yhä vaikeampaa ja asiakas ajautuu vähitellen kohti maksuhäiriötilaa ei-markovilaisen drift-ilmiön kautta. Sekoitemallin arviot transitiotodennäköisyyksistä alimmista luokista maksuhäiriöön ovat muita malleja selvästi maltillisempia. Toisaalta sekoitemalli antaa luokille 11 ja 12 muita malleja korkeammat todennäköisyydet siirtyä maksuhäiriöön. Suhdannemallin arviot maksuhäiriötodennäköisyyksistä ovat kaikille luokille korkeammat kuin 2008-2011 frekventistisen mallin, sillä suhdannemallin arvio on ennuste vuodelle 2012 ja sen taustalla oleva regressiomalli ennustaa maksuhäiriön luottopistemäärärajan nousevan aiempien vuosien keskiarvon yläpuolelle. On yllättävää, että parhaastakin luokasta siirtyy frekventistisen mallin ja suhdannemallin mukaan noin 10 % eli noin puolet kaikista luokasta poistuvista suoraan maksuhäiriöluokkaan. Tämä on erityisen hämmentävää, koska seuraava luokka, jolle todennäköisyys on samaa suuruusluokkaa on vasta luokka 15. Kiinnostavaa on myös huomata, ettei sekoitemalli arvioi muita malleja vastaavaa suuruusluokkaa olevaa maksuhäiriön todennäköisyyttä luokalle 1.



Kuva 16. Todennäköisyydet siirtyä kustakin luottoluokasta maksuhäiriöluokkaan suhdannemallin, sekoitemallin ja frekventistisesti lasketun transitiomatriisin perusteella.

Suhdannemallin antamat todennäköisyydet kussakin luottoluokituksessa pysymiselle on esitetty kuvassa 17. Todennäköisyys pysyä tietyssä luottoluokituksessa näyttää vähenevän portaittain siirryttäessä paremmista luokista huonompiin. Neljän parhaan luokituksen (1-4) todennäköisyys pysyä samana on yli 80 %. Tämä on odotettavaa, koska korkean luottoluokituksen yrityksillä on tyypillisesti vahva taloustilanne, eivätkä esimerkiksi suhdannevaihtelut usein vaikuta niihin yhtä nopeasti ja radikaalisti kuin muiden luottoluokkien yrityksiin. Seuraavassa neljässä luokassa (5-8) pysymisen todennäköisyys on enää noin 60-70 % ja niitä seuraavan kahdeksan luokan (9-16) enää vain noin 50 %. Siirryttäessä ns. investment grade –luokista speculative grade –luokkiin todennäköisyys luokituksen säilymiselle alenee siis selvästi. Nämä alemmat luokat ovatkin jo alttiimpia esimerkiksi suhdannevaihteluille. Luokkia 15 ja 16 lukuun ottamatta näistä luokista ei kuitenkaan siirrytä vielä juuri lainkaan (kuva Y) (ainoastaan noin 1-2 %) suoraan maksuhäiriöluokkaan, vaan siirtyminen tapahtuu tyypillisemmin muiden alempien luokkien kautta vaiheittain drift-ilmiönä. Luokassa 16 pysymisen todennäköisyys on alle 50 % ja luokassa 18 pysymisen todennäköisyys on enää noin 30 %. Todennäköisyys päätyä maksuhäiriöluokkaan luokasta 18 on 45 % eli noin 65 % luokasta 18 poistuvista siirtyy suoraan maksuhäiriöluokkaan.

Painokertoimen w kasvaessa luokassa pysymisen todennäköisyys kasvaa kaikissa luokissa. Tämä on ymmärrettävää sillä w on suhdannevaihteluiden kaikkiin luokkiin kohdistaman systemaattisen vaikutuksen painokerroin ja mitä enemmän vaihtelun vaikutusta painotetaan sitä enemmän luokitusten voi odottaa muuttuvan kun taas ilman suhdannevaihtelun huomioimista transitiomatriisit ovat tyypillisesti hyvinkin diagonaalipainotteisia eli todennäköisyydet pysyä tietyssä luottoluokassa ovat suuria.



Kuva 17. Todennäköisyydet kussakin luottoluokassa pysymiselle suhdannemallin ennusteesta vuodelle 2012 suhdannevaihteluiden vaikutuksen painokertoimen w arvoilla 0.1, 0.15, 0.2 ja 0.5.

8. Yhteenveto

8.1. Tulokset

Työ tarkoituksena oli tutkia erilaisia mahdollisuuksia estimoida ja kalibroida luottoluokitusten siirtymätodennäköisyyksiä. Kirjallisuuskatsauksessa esitettiin tavanomaisen markovilalisen mallin lisäksi kaksi muuta mielenkiintoista mallia, markovilainen sekoitemalli ja bayesiläinen malli. Näiden lisäksi työssä esiteltiin hieman perusteellisemmin ns. suhdannemalli (Trück 2008) sekä hieman soveltavampi ns. sekoitemalli. Suhdannemallin tarkoituksena oli tuoda transitiotodennäköisyyksien estimointiin mukaan talouden suhdannevaihtelu. Sekoitemallin lähtökohtana oli täyttää aiheenasettajan toinen toivomus, joka oli ulkoisen aineiston hyödyntäminen, talouden suhdanteen huomioimisen lisäksi. Ulkoisen aineiston hyödyntämisen tarkoituksena oli täydentää aiheenasettajan vajavaista aineistoa. Koska nämä estimointimenetelmät ovat lähtökohtaisesti hyvin erilaiset, ei voida kumpaakaan menetelmää pitää toista parempana. Jatkoa ajatellen olisi mielenkiintoista soveltaa suhdannemalliin esimerkiksi normaalijakauman sijaan t-jakaumaa eri luottoluokille. Lisäksi lähdeaineiston perusteella (Trück 2008) suhdannemallia voisi kehittää vielä tässä työssä esitetystä mallista paljon pidemmälle ja paremmin sovellettavaan aineistoon sopivaksi. Erityisesti parametrin w kalibroiminen voisi olla mielenkiintoinen optimointitehtävä.

8.2. Projektin eteneminen ja työskentely

Projekti eteni sille asetetun aikataulun mukaisesti ja riskeistä realisoitui aineiston niukkuuteen liittyvät riskit, joista selvittiin suunnitelman mukaisilla toimenpiteillä, aineiston laatua paikattiin ulkoisella datalla, vaikeaselkoisimmat menetelmät karsittiin projektin alkuvaiheissa pois. Tässä vaiheessa ei vielä voida arvioida aiheenasettajan tyytyväisyyttä projektin lopputulokseen.

Projektin alku- ja keskivaiheilla pidimme joka viikko vähintään yhden ryhmätapaamisen, jossa jokainen jäsen tai jäsenparit esittelivät edellisellä viikolla tekemiään tehtäviään muille ryhmän jäsenille. Tämä käytäntö toimi todella hyvin ja varmisti, että kaikki ryhmän jäsenet tiesivät miten projekti etenee. Projektin lopulla pidimme tapaamisia harvemmin, koska loppuraportin kirjoittaminen onnistui ilman tapaamisiakin.

8.3. Parannukset

Riskien tunnistuksessa olisi voinut kiinnittää enemmän huomiota työmäärän arviointiin. Suunnitelmassamme arvioimme työmäärää vain koko projektille, mutta olisi ollut hyödyllisempää arvioida työmäärät tehtäväkokonaisuuksittain, jolloin olisi ollut helpompi määritellä kriittisimmät tehtävät. Näin olisi voitu varautua erikseen niihin, jotka todennäköisimmin aiheuttavat suunniteltua enemmän työtä.

Kokonaisuutena projekti oli kaikille ryhmän jäsenille varsin mieluisa. Jokaiselle jäsenelle löytyi sopivia tehtäviä ottaen huomioon opiskelujen suuntautuneisuuden. Moni ryhmän jäsen pääsi hyödyntämään aikaisemmin pääaineopintojensa kursseilla opittuja menetelmiä.

Lähdeluettelo

Altman, Edward. *The importance and subtlety of credit rating migration.* Journal of Banking & Finance 22, 1231-1247, 1998.

Altman, Edward, I. Kao. *Rating drift of high yield bonds.* Journal of Fixed Income, 15-20, 1992.

Bangia, Anil, Diebold, Francis X., Kronimus, Andre, Schagen, Christian, Schuermann, Til. *Ratings migration and the business cycle, with applications to credit portfolio stress testing.* Journal of Banking & Finance, 2002.

Barber. *Bayesian Reasoning and Machine Learning.* Cambridge Press, 2012.

Frydman, Halina, Schuermann Til. *Credit rating dynamics and Markov mixture models.* Journal of Banking & Finance, 32, 1062–1075, 2008.

Israel, Robert B, Jeffrey S Rosenthal, and Jason Z Wei. "Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices with Applications to Credit Ratings." *Mathematical Finance 11*, 2001: 245-265.

Lando, David, and Torben M Skødeberg. "Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations." *Journal of Banking & Finance 26*, 2002: 423-444.

Lando, David, Skødeberg, Torben. *Analyzing ratings transitionsand rating drift with continuous observations.* Journal of Banking & Finance, 2002.

Nickell, P., Perraudin, William, Varotto, S. *Stability of rating transitions.* Journal of Banking & Finance, 24, 203-227, 2000.

Nickell, Pamela, William Perraudin, and Simone Varotto. "Stability of rating transitions." *Journal of Banking & Finance 24* (Journal of Banking & Finance), 2000: 203-227.

Stefanescu, Catalina, Radu Tunaru, and Stuart Turnbull. "The Credit Rating Process and Estimation of Transition Probabilities: A Bayesian Approach." *Journal of Empirical Finance 16* (Elsevier), 2009: 216-234.

Trück, Stefan. "Forecasting credit migration matrices with business cycle effects—a model comparison." *The European Journal of Finance 14*, 2008: 359-379.

Xing, Haipend, Ning Sun, and Ying Chen. "Credit rating dynamics in the presence of unknown structural breaks." *Journal of Banking & Finance 36*, 2012: 78-89.

Liitteet

Liite 1: Makroekonomiset aikasarjat

VUOSI	KONKURSSIEN SUHTEELLINEN OSUUS	BKT MUUTOS	TYÖTTÖMYYSPROSENTIN MUUTOS
1994		0,010879527	0,018404908
1995	0,020793976	0,009869977	-0,072289157
1996	0,018171359	0,005342844	-0,051948052
1997	0,014651242	0,012356733	-0,130136986
1998	0,012285407	0,013937508	-0,102362205
1999	0,011862488	0,012037979	-0,105263158
2000	0,011032076	0,032789823	-0,039215686
2001	0,010514195	0,025317808	-0,071428571
2002	0,010722794	0,016000341	0
2003	0,010065504	0,008692271	-0,010989011
2004	0,008593382	0,001572327	-0,022222222
2005	0,007844191	0,008603886	-0,045454545
2006	0,007563595	0,017754229	-0,083333333
2007	0,007153148	0,024188632	-0,103896104
2008	0,008001667	0,040254246	-0,072463768
2009	0,009905093	0	0,28125
2010	0,008478038	0,012121361	0,024390244
2011	0,008943028	0,034137763	-0,071428571
Lähde: Tilastokeskus			

Liite 2: Ulkoisen luokittajan (Fitch) matriisi lisätyllä luokalla

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
		AAA	AA+	AA	AA-	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	add	CCC-C	D
1	AAA	0,9439	0,0294	0,0214	0,0053	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	AA+	0,0046	0,816018	0,127687	0,042596	0,0015	0,0046	0,0015	0	0,0015	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	AA	0,0006	0,027095	0,80024	0,115977	0,042392	0,005899	0,0024	0,0024	0	0,0024	0	0	0,0006	0	0	0	0	0	0
4	AA-	0,0003	0,001	0,032898	0,836758	0,094595	0,023999	0,0065	0,0014	0,0014	0	0	0	0	0	0	0,0003	0,00015	0	0,0007
5	A+	0	0,0009	0,004099	0,04789	0,828134	0,087582	0,018296	0,006999	0,003799	0,002	0	0,0003	0	0	0	0	0	0	0
6	A	0,0005	0	0,0023	0,009099	0,055192	0,814378	0,082788	0,019397	0,007999	0,0021	0,0023	0,0012	0,0002	0,0002	0,0009	0	0,00025	0,0005	0,0007
7	A-	0	0	0,000999	0,001798	0,01009	0,06294	0,790549	0,089415	0,017983	0,008592	0,001299	0,001299	0,008792	0,0003	0,000999	0,0003	0,000949	0,001598	0,0021
8	BBB+	0	0	0,0003	0,001999	0,004597	0,009793	0,071846	0,774319	0,098926	0,018986	0,007794	0,001999	0,003497	0,001399	0,0003	0	0,000849	0,001699	0,0017
9	BBB	0	0	0,000798	0,001297	0,000299	0,003892	0,011675	0,072943	0,806765	0,065359	0,011675	0,010078	0,003393	0,002594	0,001796	0,000499	0,002046	0,003592	0,0013
10	BBB-	0	0,0004	0,0004	0,001498	0,002197	0,001498	0,002197	0,012486	0,101883	0,771812	0,053339	0,020576	0,010688	0,005194	0,006592	0,000699	0,001249	0,001798	0,00549
11	BB+	0	0,001392	0	0	0	0	0,001392	0,007156	0,025644	0,14263	0,688798	0,057748	0,019282	0,010735	0,013518	0,003578	0,006063	0,008548	0,01352
12	BB	0	0	0	0	0	0,000785	0	0,004021	0,007257	0,031382	0,109444	0,662057	0,065117	0,027361	0,02334	0,018535	0,019319	0,020104	0,01128
13	BB-	0,000784	0	0	0	0	0	0,000784	0,000784	0,006464	0,010578	0,038883	0,113516	0,644564	0,058374	0,046229	0,017042	0,020666	0,02429	0,01704
14	B+	0	0	0	0	0	0	0	0,00214	0,00214	0,004281	0,005254	0,03814	0,15577	0,612571	0,085814	0,029675	0,027048	0,024421	0,01275
15	B	0	0	0	0	0	0,003224	0,001043	0	0	0,001043	0,003224	0,008534	0,034138	0,137594	0,620834	0,061827	0,051728	0,041629	0,03518
16	B-	0	0	0	0	0	0,002896	0,000941	0	0,001955	0,001955	0,001955	0,002896	0,009629	0,024109	0,105198	0,501955	0,276064	0,050174	0,02027
17	add	0	0	0	0	0	0,001253	0,000407	0,000689	0,000845	0,000845	0,002192	0,001942	0,01024	0,012463	0,056304	0,263011	0,373677	0,178274	0,09786
18	CCC-C	0	0	0	0	0	0	0	0,001662	0	0	0,003249	0,001662	0,014658	0,004911	0,026067	0,110767	0,244277	0,377786	0,21496

Liite 3: Sekoitemallilla estimoitu transitiomatriisi

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
		R1,0	**R2,0**	**R2,5**	**R3,0**	**R3,5**	**R4,0**	**R4,5**	**R5,0**	**R5,5**	**R6,0**	**R6,5**	**R7,0**	**R7,5**	**R8,0**	**R8,5**	**R9,0**	**R9,5**	**R10,0**	**DEF**
1	**R1,0**	0,759591	0,073369	0,034007	0,022381	0,01671	0,01334	0,011103	0,00951	0,008317	0,007391	0,00665	0,006044	0,00554	0,005113	0,004747	0,004431	0,004153	0,003909	0,00369
2	**R2,0**	0,085889	0,643897	0,082639	0,038841	0,025656	0,019188	0,015333	0,012771	0,010943	0,009574	0,00851	0,007658	0,006962	0,006382	0,005891	0,00547	0,005105	0,004786	0,0045
3	**R2,5**	0,037221	0,08035	0,629144	0,079313	0,037014	0,024402	0,018234	0,014563	0,012125	0,010388	0,009086	0,008075	0,007266	0,006605	0,006054	0,005588	0,005189	0,004842	0,00454
4	**R3,0**	0,02471	0,037623	0,081789	0,607131	0,078816	0,037028	0,024455	0,018289	0,014614	0,012172	0,01043	0,009125	0,00811	0,007299	0,006635	0,006082	0,005614	0,005213	0,00487
5	**R3,5**	0,018428	0,024707	0,037622	0,081813	0,593669	0,078758	0,037011	0,024446	0,018282	0,014609	0,012167	0,010426	0,009121	0,008107	0,007296	0,006633	0,00608	0,005612	0,00521
6	**R4,0**	0,015176	0,019009	0,025454	0,038651	0,083132	0,569278	0,083125	0,038649	0,025453	0,019008	0,015176	0,012633	0,01082	0,009463	0,008409	0,007566	0,006877	0,006303	0,00582
7	**R4,5**	0,012154	0,014591	0,018256	0,024401	0,036915	0,078312	0,577422	0,082269	0,037706	0,024741	0,018444	0,014711	0,012237	0,010477	0,00916	0,008137	0,00732	0,006652	0,0061
8	**R5,0**	0,010428	0,012171	0,014615	0,018295	0,024473	0,037085	0,079162	0,5733	0,081314	0,037516	0,024658	0,018397	0,01468	0,012216	0,010461	0,009147	0,008127	0,007312	0,00665
9	**R5,5**	0,009782	0,011185	0,013057	0,015684	0,019641	0,026291	0,039887	0,085457	0,539799	0,086659	0,040128	0,026394	0,019699	0,015721	0,013082	0,011203	0,009797	0,008704	0,00783
10	**R6,0**	0,008588	0,009664	0,01105	0,0129	0,015496	0,019407	0,02598	0,039426	0,084567	0,544665	0,085396	0,039592	0,026051	0,019446	0,015521	0,012917	0,011063	0,009674	0,0086
11	**R6,5**	0,008017	0,00891	0,010027	0,011464	0,013384	0,016077	0,020131	0,026944	0,040863	0,087398	0,527963	0,089193	0,041223	0,027098	0,020217	0,016131	0,013421	0,011492	0,01005
12	**R7,0**	0,007167	0,007886	0,008766	0,009867	0,011284	0,013177	0,015835	0,019843	0,02659	0,040434	0,087382	0,539207	0,085965	0,04015	0,026469	0,019776	0,015792	0,013147	0,01126
13	**R7,5**	0,006443	0,00703	0,007734	0,008595	0,009672	0,011058	0,012909	0,015505	0,019414	0,025982	0,039404	0,084336	0,552299	0,085828	0,039703	0,02611	0,019485	0,01555	0,01294
14	**R8,0**	0,006185	0,006701	0,007312	0,008045	0,008942	0,010064	0,011507	0,013435	0,016141	0,020218	0,027072	0,041101	0,088274	0,541542	0,088753	0,041197	0,027113	0,020241	0,01616
15	**R8,5**	0,005415	0,00582	0,006293	0,006849	0,007513	0,008323	0,00933	0,010618	0,012328	0,01471	0,018267	0,024195	0,036221	0,076696	0,531165	0,075978	0,039936	0,035626	0,07472
16	**R9,0**	0,005595	0,005981	0,006424	0,006939	0,007545	0,008267	0,009144	0,010232	0,011618	0,013447	0,015979	0,01973	0,02591	0,038265	0,078996	0,472285	0,082519	0,058095	0,12303
17	**R9,5**	0,00538	0,005792	0,006267	0,006821	0,007474	0,008254	0,009201	0,010375	0,011863	0,013809	0,01645	0,020227	0,026035	0,036013	0,056704	0,118919	0,268441	0,148178	0,2238
18	**R10,0**	0,005822	0,006189	0,006603	0,007077	0,007623	0,008259	0,00901	0,009909	0,011005	0,01237	0,014119	0,016437	0,019662	0,024455	0,032357	0,04801	0,096811	0,272212	0,39207

Liite 4: Suhdannemallilla estimoidut transitiomatriisit, w=0.1

ESTIMOIDUT TRANSITIOTODENNÄKÖISYYDET	R1,0	R2,0	R2,5	R3,0	R3,5	R4,0	R4,5	R5,0	R5,5	R6,0	R6,5	R7,0	R7,5	R8,0	R8,5	R9,0	R9,5	R10,0	DEF
R1,0	0,832	0,054	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,114
R2,0	0,000	0,846	0,018	0,009	0,009	0,000	0,109	0,000	0,000	0,000	0,000	0,010	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R2,5	0,000	0,000	0,844	0,129	0,028	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R3,0	0,000	0,009	0,000	0,830	0,114	0,028	0,009	0,000	0,000	0,000	0,010	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R3,5	0,000	0,000	0,006	0,117	0,741	0,113	0,022	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R4,0	0,000	0,000	0,000	0,021	0,094	0,639	0,114	0,110	0,003	0,009	0,009	0,003	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R4,5	0,000	0,000	0,000	0,004	0,022	0,139	0,668	0,126	0,032	0,000	0,000	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R5,0	0,000	0,003	0,000	0,003	0,000	0,023	0,072	0,654	0,182	0,046	0,006	0,010	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R5,5	0,000	0,000	0,002	0,000	0,002	0,000	0,010	0,108	0,536	0,271	0,038	0,016	0,003	0,011	0,000	0,003	0,000	0,000	0,000
R6,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,004	0,004	0,024	0,125	0,542	0,154	0,082	0,024	0,014	0,008	0,002	0,000	0,002	0,015
R6,5	0,000	0,000	0,000	0,003	0,006	0,003	0,000	0,011	0,038	0,179	0,465	0,193	0,071	0,018	0,003	0,006	0,000	0,000	0,003
R7,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,002	0,000	0,003	0,023	0,149	0,526	0,144	0,095	0,042	0,007	0,002	0,000	0,006
R7,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,004	0,043	0,178	0,463	0,186	0,066	0,021	0,000	0,007	0,030
R8,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003	0,002	0,015	0,072	0,160	0,504	0,113	0,085	0,011	0,013	0,023
R8,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,071	0,159	0,483	0,135	0,037	0,016	0,100
R9,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,007	0,058	0,127	0,505	0,098	0,080	0,126
R9,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,069	0,000	0,023	0,045	0,045	0,433	0,116	0,268
R10,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,155	0,154	0,258	0,433
DEF	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000

95%-ALARAJA	R1,0	R2,0	R2,5	R3,0	R3,5	R4,0	R4,5	R5,0	R5,5	R6,0	R6,5	R7,0	R7,5	R8,0	R8,5	R9,0	R9,5	R10,0	DEF
R1,0	0,890	0,039	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,070
R2,0	0,000	0,901	0,013	0,006	0,006	0,000	0,069	0,000	0,000	0,000	0,000	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R2,5	0,000	0,000	0,899	0,086	0,015	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R3,0	0,000	0,017	0,000	0,878	0,079	0,016	0,005	0,000	0,000	0,000	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R3,5	0,000	0,000	0,013	0,173	0,728	0,074	0,011	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R4,0	0,000	0,000	0,000	0,038	0,136	0,655	0,087	0,072	0,002	0,005	0,005	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R4,5	0,000	0,000	0,000	0,008	0,038	0,193	0,652	0,087	0,018	0,000	0,000	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R5,0	0,000	0,006	0,000	0,006	0,000	0,039	0,106	0,674	0,133	0,028	0,003	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R5,5	0,000	0,000	0,006	0,000	0,005	0,000	0,017	0,157	0,566	0,209	0,024	0,009	0,001	0,006	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000
R6,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,008	0,007	0,040	0,174	0,556	0,122	0,057	0,015	0,008	0,005	0,001	0,000	0,001	0,007
R6,5	0,000	0,000	0,000	0,006	0,011	0,005	0,000	0,019	0,059	0,229	0,460	0,148	0,046	0,010	0,002	0,003	0,000	0,000	0,001
R7,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,004	0,003	0,000	0,006	0,040	0,204	0,533	0,113	0,065	0,025	0,004	0,001	0,000	0,003
R7,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,005	0,009	0,070	0,231	0,463	0,145	0,045	0,013	0,000	0,004	0,016
R8,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,006	0,005	0,026	0,107	0,200	0,487	0,086	0,057	0,006	0,008	0,012
R8,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,114	0,204	0,478	0,106	0,027	0,011	0,061
R9,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,014	0,091	0,166	0,510	0,080	0,060	0,079
R9,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,112	0,000	0,032	0,060	0,057	0,452	0,100	0,188
R10,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,227	0,181	0,261	0,332
DEF	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000

95%-YLÄRAJA	R1,0	R2,0	R2,5	R3,0	R3,5	R4,0	R4,5	R5,0	R5,5	R6,0	R6,5	R7,0	R7,5	R8,0	R8,5	R9,0	R9,5	R10,0	DEF
R1,0	0,795	0,063	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,143
R2,0	0,000	0,811	0,020	0,010	0,010	0,000	0,134	0,000	0,000	0,000	0,000	0,014	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R2,5	0,000	0,000	0,808	0,154	0,038	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R3,0	0,000	0,006	0,000	0,797	0,135	0,035	0,013	0,000	0,000	0,000	0,014	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R3,5	0,000	0,000	0,004	0,093	0,735	0,138	0,030	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R4,0	0,000	0,000	0,000	0,015	0,075	0,618	0,127	0,133	0,004	0,012	0,012	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R4,5	0,000	0,000	0,000	0,002	0,016	0,114	0,663	0,150	0,042	0,000	0,000	0,013	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R5,0	0,000	0,002	0,000	0,002	0,000	0,017	0,058	0,630	0,209	0,059	0,009	0,014	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R5,5	0,000	0,000	0,002	0,000	0,002	0,000	0,007	0,086	0,510	0,302	0,048	0,021	0,004	0,015	0,000	0,004	0,000	0,000	0,000
R6,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,003	0,018	0,103	0,523	0,170	0,097	0,029	0,018	0,011	0,003	0,000	0,003	0,021
R6,5	0,000	0,000	0,000	0,002	0,004	0,002	0,000	0,008	0,030	0,153	0,457	0,216	0,087	0,024	0,004	0,009	0,000	0,000	0,005
R7,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,000	0,002	0,017	0,123	0,510	0,159	0,112	0,054	0,010	0,003	0,000	0,008
R7,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,032	0,151	0,453	0,205	0,079	0,026	0,000	0,009	0,040
R8,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,002	0,011	0,057	0,139	0,500	0,126	0,102	0,013	0,017	0,031
R8,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,054	0,136	0,474	0,149	0,043	0,019	0,126
R9,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,004	0,044	0,107	0,490	0,107	0,091	0,157
R9,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,052	0,000	0,019	0,038	0,039	0,414	0,123	0,315
R10,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,124	0,137	0,251	0,488
DEF	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000

Liite 5: Aiheenasettajan aineistosta laskettu transitiomatriisi

	R1	R2	R2,5	R3	R3,5	R4	R4,5	R5	R5,5	R6	R6,5	R7	R7,5	R8	R8,5	R9	R9,5	R10	DEF
R1	0,842	0,053	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,105
R2	0,000	0,856	0,017	0,008	0,008	0,000	0,102	0,000	0,000	0,000	0,000	0,008	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R2,5	0,000	0,000	0,854	0,122	0,024	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R3	0,000	0,008	0,000	0,840	0,109	0,025	0,008	0,000	0,000	0,000	0,008	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R3,5	0,000	0,000	0,006	0,119	0,748	0,107	0,019	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R4	0,000	0,000	0,000	0,021	0,096	0,649	0,111	0,103	0,003	0,008	0,008	0,003	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R4,5	0,000	0,000	0,000	0,004	0,022	0,142	0,675	0,120	0,029	0,000	0,000	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R5	0,000	0,003	0,000	0,003	0,000	0,023	0,074	0,664	0,177	0,043	0,006	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
R5,5	0,000	0,000	0,002	0,000	0,002	0,000	0,010	0,110	0,547	0,265	0,036	0,014	0,002	0,010	0,000	0,002	0,000	0,000	0,000
R6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,004	0,004	0,024	0,128	0,551	0,152	0,079	0,022	0,013	0,007	0,002	0,000	0,002	0,013
R6,5	0,000	0,000	0,000	0,003	0,006	0,003	0,000	0,011	0,039	0,183	0,472	0,189	0,067	0,017	0,003	0,006	0,000	0,000	0,003
R7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,002	0,000	0,003	0,023	0,153	0,534	0,142	0,090	0,039	0,006	0,002	0,000	0,005
R7,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,004	0,043	0,182	0,471	0,182	0,063	0,020	0,000	0,007	0,026
R8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,002	0,015	0,074	0,164	0,510	0,110	0,081	0,010	0,012	0,020
R8,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,071	0,163	0,490	0,133	0,036	0,015	0,092
R9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,006	0,058	0,130	0,513	0,097	0,078	0,117
R9,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,070	0,000	0,023	0,047	0,047	0,442	0,116	0,256
R10	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,158	0,158	0,263	0,421
DEF	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000